

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x+2}$ .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Cho hai điểm  $A(-5; 1)$ ,  $B(1; 3)$ . Tìm các điểm M trên đồ thị (C) sao cho tam giác MAB vuông tại M.

**Câu II. (2,0 điểm)**

1. Giải phương trình  $\frac{2\cos^3 x - 2\cos x - \sin 2x}{\cos x - 1} = 2(1 + \cos x)(1 + \sin x)$ .

2. Giải bất phương trình  $\frac{2x^2}{(3 - \sqrt{9 + 2x})^2} < x + 21$ .

**Câu III. (1,0 điểm)** Tính tích phân  $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$

**Câu IV. (1,0 điểm)** Cho tứ diện ABCD có ba cạnh AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau,  $AB = BC = CD = a$ . Gọi C' và D' lần lượt là hình chiếu của điểm B trên AC và AD. Tính thể tích tứ diện ABC'D'.

**Câu V. (1,0 điểm)** Cho hai số thực x, y thỏa mãn  $x^2 + y^2 = 2$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = 2(x^3 + y^3) - 3xy.$$

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)

A. Theo chương trình Chuẩn

**Câu VIa. (2,0 điểm)**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết đỉnh A nằm trên đường thẳng d:  $x + y - 1 = 0$  và đường tròn nội tiếp hình vuông là (C):  $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ .

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; 1)$ ,  $C(0; 0; 2)$  và đường thẳng  $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{1}$ . Tìm điểm M thuộc đường thẳng  $\Delta$  sao cho góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (CAB) bằng  $30^\circ$ .

**Câu VIIa. (1,0 điểm)** Tìm số phức z thỏa mãn  $\begin{cases} |z - 2i| = |z| \\ |z - i| = |z - 1| \end{cases}$ .

B. Theo chương trình Nâng cao

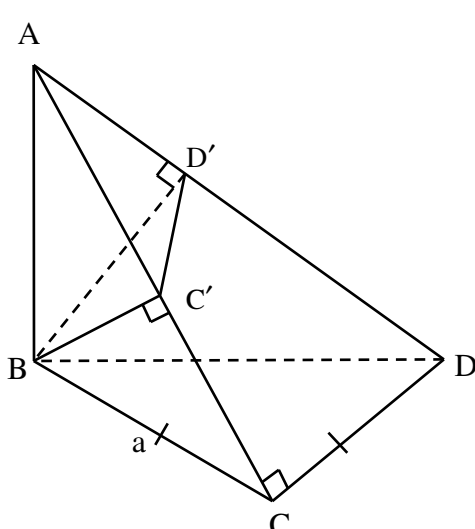
**Câu VIb. (2,0 điểm)**

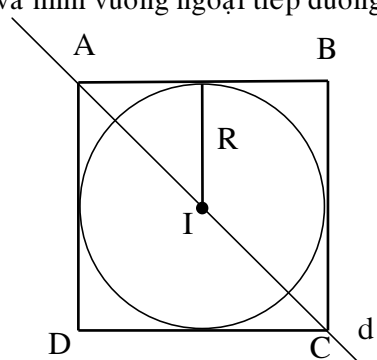
1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C):  $x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$  và điểm  $M(1; -1)$ . Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho  $MA = 3MB$ .

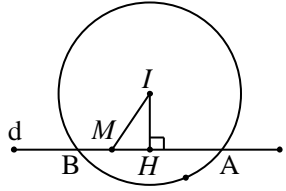
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm  $A(1; 4; 2)$ ,  $B(-1; 2; 4)$  và  $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ . Tìm điểm M thuộc  $\Delta$  sao cho diện tích tam giác MAB nhỏ nhất.

**Câu VIIb. (1,0 điểm)** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} e^x - e^y = x - y \\ \log_3 \frac{x}{3} + \log_{\sqrt{3}} 9y^3 = 10 \end{cases}$ .

Câu	Đáp án	Điểm												
I (2,0điểm)	<b>1. (1,0 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1)...</b>													
	• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ . • Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: $y' = \frac{5}{(x+2)^2} > 0, \forall x \neq -2$ . - Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$ .	0,25												
	- Giới hạn và tiệm cận: $\oplus \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2 \Rightarrow$ tiệm cận ngang: $y = 2$ . $\oplus \lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng: $x = -2$ .	0,25												
	- Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td><math>-\infty</math></td><td>-2</td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td><math>+\infty</math></td><td><math>-\infty</math></td></tr></table>	x	$-\infty$	-2	$+\infty$	y'		+	+	y	2	$+\infty$	$-\infty$	0,25
	x	$-\infty$	-2	$+\infty$										
	y'		+	+										
	y	2	$+\infty$	$-\infty$										
	• Đồ thị tự vẽ	0,25												
<b>2. (1,0 điểm) Tìm các điểm M trên đồ thị (C) sao cho tam giác MAB vuông tại M.</b>														
Gọi $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{x_0+2}\right) \in (C), x_0 \neq -2$ . Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $I(-2;2)$ , độ dài $AB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ .	0,25													
Tam giác MAB vuông tại M khi và chỉ khi $IM = \frac{1}{2}AB = \sqrt{10}$ .	0,25													
$\Leftrightarrow (x_0+2)^2 + \left(\frac{2x_0-1}{x_0+2} - 2\right)^2 = 10 \Leftrightarrow (x_0+2)^2 + \frac{25}{(x_0+2)^2} = 10$ $\Leftrightarrow (x_0+2)^2 = 5 \Leftrightarrow x_0 = -2 \pm \sqrt{5}$	0,25													
Vậy có hai điểm cần tìm là $M_1\left(-2-\sqrt{5}; \sqrt{5}+2\right), M_2\left(-2+\sqrt{5}; -\sqrt{5}+2\right)$ .	0,25													
II (2,0 điểm)	<b>1. (1,0 điểm) Giải phương trình...</b>													
	Điều kiện $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}. (*)$	0,25												
	Với điều kiện (*), phương trình đã cho tương đương $-2\cos x(\sin^2 x - 1) - 2\cos x(\sin x + 1) = -2(1 - \cos^2 x)(1 + \sin x)$ $\Leftrightarrow \cos x(\sin x + 1)\sin x = \sin^2 x(1 + \sin x)$ $\Leftrightarrow (\sin x + 1)\sin x(\cos x - \sin x) = 0$	0,25												
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = 0 \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$	0,25												

	$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$	0,25
	<b>2. (1,0 điểm) Giải bất phương trình...</b>	
	Điều kiện $\begin{cases} 9+2x \geq 0 \\ 3-\sqrt{9+2x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{9}{2} \text{ và } x \neq 0 (*)$ .	0,25
	Biến đổi bất phương trình và rút gọn ta được $\frac{x^2}{9+x-3\sqrt{9+2x}} < x+21 \Leftrightarrow x^2 < (x+21)(9+x-3\sqrt{9+2x}) \Leftrightarrow (x+21)\sqrt{9+2x} < 10x+63$	0,25
	$\Leftrightarrow (x+21)^2(9+2x) < (10x+63)^2 \Leftrightarrow x^2(2x-7) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{7}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$	0,25
	Kết hợp với điều kiện (*) bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $T = \left[-\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right) \setminus \{0\}$ .	0,25
<b>III</b> (1,0 điểm)	<b>Tính tích phân</b>	
	Ta có $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$ .	0,25
	Đặt $t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow t^2 = x^2+4 \Rightarrow dt = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$ .  Lúc đó $I = \int_3^4 \frac{dt}{t^2-4}$	0,25
	$= \frac{1}{4} \int_3^4 \frac{(t+2)-(t-2)}{(t+2)(t-2)} dt = \frac{1}{4} \left( \int_3^4 \frac{dt}{t-2} - \int_3^4 \frac{dt}{t+2} \right) = \frac{1}{4} \ln \left  \frac{t-2}{t+2} \right  \Big _3^4$	0,25
	$= \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}. \text{ Vậy } I = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}.$	0,25
<b>IV</b> (1,0 điểm)	<b>Tính thể tích tứ diện ABC'D'</b>	
	Vì $\begin{cases} CD \perp BC \\ CD \perp AB \end{cases}$ nên $CD \perp (ABC)$ và do đó $(ABC) \perp (ACD)$ . Vì $BC' \perp AC$ nên $BC' \perp (ACD)$ .	0,25
		

	<p>Thể tích tứ diện <math>ABC'D'</math>:</p> $V_{ABC'D'} = \frac{1}{3} \cdot BC' \cdot S_{AC'D'} = \frac{1}{6} \cdot BC' \cdot AC' \cdot AD' \sin \widehat{CAD} = \frac{1}{6} \cdot BC' \cdot AC' \cdot AD' \cdot \frac{CD}{AD}.$	0,25
	<p>Vì tam giác <math>ABC</math> vuông cân tại <math>B</math> nên <math>AC' = CC' = BC' = \frac{a\sqrt{2}}{2}</math>.</p> <p>Ta có <math>AD^2 = AB^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 = 3a^2</math> nên <math>AD = a\sqrt{3}</math>.</p> <p>Vì <math>BD'</math> là đường cao của tam giác vuông <math>ABD</math> nên <math>AD' \cdot AD = AB^2 \Rightarrow AD' = \frac{AB^2}{AD} = \frac{a}{\sqrt{3}}</math>.</p>	0,25
	<p>Vậy <math>V_{ABC'D'} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{a^3}{36}</math> (đvtt).</p>	0,25
<b>V</b> (1,0 điểm)	<b>Tìm giá trị lớn nhất của P</b>	
	<p>Đặt <math>S = x + y</math>; <math>P = xy</math> (điều kiện <math>S^2 \geq 4P</math>).</p> <p>Từ giả thiết ta có <math>S^2 - 2P = 2 \Rightarrow P = \frac{S^2 - 2}{2} \leq \frac{S^2}{4} \Rightarrow  S  \leq 2</math></p>	0,25
	<p>Từ đó, ta có:</p> $A = 2 \left[ (x+y)^3 - 3(x+y)xy \right] - 3xy = 2 \left[ S^3 - 3S \left( \frac{S^2 - 2}{2} \right) \right] - 3 \left( \frac{S^2 - 2}{2} \right)$ $= -S^3 - \frac{3}{2}S^2 + 6S + 3 = f(S)$ <p><math>f'(S) = -3S^2 - 3S + 6</math>; <math>f'(S) = 0 \Leftrightarrow S = 1</math> hoặc <math>S = -2</math>.</p>	0,25
	<p>Khi đó, ta có</p> <p>• <math>\text{Max} A = \max_{S \in [-2; 2]} f(S) = \max \{f(-2); f(1); f(2)\} = f(1) = \frac{13}{2}</math> tại <math>\begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}</math></p>	0,25
<b>Via</b> (2,0 điểm)	<b>1. (1,0 điểm) Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết đỉnh A</b>	
	<p>Đường tròn (C) có tâm <math>I(4; -3)</math> và bán kính <math>R = 2</math>.</p> <p>Ta có <math>A \in d \Rightarrow A(a; 1-a)</math>, <math>a \in \mathbb{R}</math></p> <p><b>Theo giả thiết</b> <math>I \in d</math> và hình vuông ngoại tiếp đường tròn nên <math>IA = \sqrt{2}R = 2\sqrt{2}</math>.</p>	
		
	Hình minh họa	

	$\Leftrightarrow (a-4)^2 + (4-a)^2 = 8 \Leftrightarrow (a-4)^2 = 4 \Leftrightarrow  a-4  = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a-4=2 \\ a-4=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ a=2 \end{cases}$ <p>Với <math>a=2</math> thì <math>A(2; -1)</math> nên <math>C(6; -5)</math>.</p> <p>Với <math>a=6</math> thì <math>A(6; -5)</math> nên <math>C(2; -1)</math>.</p>	0,25
	<p>Mặt khác, đường thẳng BD qua I và vuông góc d có phương trình BD: <math>x - y - 7 = 0</math>, do đó <math>B(b; b-7)</math></p> <p><b>Ta có</b> <math>IB = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (b-4)^2 + (b-4)^2 = 8 \Leftrightarrow (b-4)^2 = 4 \Leftrightarrow  b-4  = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b=6 \\ b=2 \end{cases}</math></p>	0,25
	<p>Với <math>b=2</math> thì <math>B(2; -5)</math> nên <math>D(6; -1)</math>.</p> <p>Với <math>b=6</math> thì <math>B(6; -1)</math> nên <math>D(2; -5)</math>.</p>	0,25
	<b>2. (1,0 điểm) Tìm tọa độ điểm M...</b>	
	<p>Vì <math>M \in \Delta \Rightarrow M(t; -t-2; t+1)</math>, <math>t \in \mathbb{R}</math></p> <p>Ta có <math>\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 1)</math>, <math>\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 2)</math>, <math>\overrightarrow{AM} = (t-1; -t-2; t+1)</math></p>	0,25
	Suy ra một VTCP của mặt phẳng (MAB) là $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}] = (2t+3; 2t; 3)$ .	0,25
	Một VTCP của mặt phẳng (CAB) là $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (2; 1; 1)$ .	0,25
	<p>Vì góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (CAB) bằng <math>30^\circ</math> nên</p> $\cos 30^\circ =  \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)  \text{ hay } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{ 2(2t+3) + 2t + 3 }{\sqrt{(2t+3)^2 + (2t)^2 + 3^2} \sqrt{6}}$ $\Leftrightarrow \sqrt{(2t+3)^2 + (2t)^2 + 3^2} = \sqrt{2}  2t+3  \Leftrightarrow t = 0.$ <p>Điểm cần tìm có tọa độ <math>M(0; -2; 1)</math>.</p>	0,25
<b>VIIa</b> (1,0 điểm)	<b>Tìm số phức</b>	
	Giả sử $z = x + yi$ ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), suy ra $z - 2i = x + (y-2)i$ , $z - i = x + (y-1)i$ , $z - 1 = x - 1 + yi$	0,5
	Ta có $\begin{cases}  z - 2i  =  z  \\  z - i  =  z - 1  \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 \\ x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4y = 0 \\ -2y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ . Vậy } z = 1 + i.$	0,25
<b>VIIb</b> (2,0 điểm)	<b>1. (1,0 điểm) Viết phương trình đường thẳng đi qua M...</b>	
	(C) có tâm $I(4; 0)$ , bán kính $R = 5$ . Ta có $IM = \sqrt{10} < 5 = R \Rightarrow M$ nằm trong (C).	0,25
	<p>Giả sử đường thẳng d đi qua M, cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho <math>MA = 3MB</math>.</p> <p>Kẻ <math>IH \perp AB \Rightarrow HB = HA = \frac{AB}{2}</math></p> <p>Mà <math>MA = 3MB \Rightarrow MH = \frac{AB}{4} = \frac{BH}{2}</math></p> <p>Do đó <math>IH^2 = IM^2 - MH^2 = IM^2 - \frac{BH^2}{4} = IM^2 - \frac{R^2 - IH^2}{4}</math></p> <p><math display="block">\Leftrightarrow IH^2 = \frac{4IM^2 - R^2}{3} = \frac{40 - 25}{3} = 5 \Rightarrow IH = \sqrt{5}.</math></p> 	0,25

	<p>Đường thẳng d đi qua M, phương trình có dạng  <math>a(x-1) + b(y+1) = 0 \Leftrightarrow ax + by + b - a = 0 \ (a^2 + b^2 \neq 0)</math>.</p> <p><math>d(I,d) = IH \Leftrightarrow \frac{ 4a+b-a }{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (3a+b)^2 = 5(a^2+b^2) \Leftrightarrow 2a^2 + 3ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ a = \frac{b}{2} \end{cases}</math>.</p>	0,25
	<p>• Với <math>a = -2b</math> chọn <math>b = -1</math> thì <math>a = 2</math> ta có <math>d_1 : 2x - y - 3 = 0</math>.</p> <p>• Với <math>a = \frac{b}{2}</math> chọn <math>b = 2</math> thì <math>a = 1</math> ta có <math>d_2 : x + 2y + 1 = 0</math>.</p>	0,25
	<b>2. (1,0 điểm) Tìm điểm M thuộc <math>\Delta</math> sao cho diện tích tam giác MAB nhỏ nhất.</b>	
	<p>Vì <math>M \in \Delta \Rightarrow M(1-t; -2+t; 2t), t \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>Ta có <math>\overrightarrow{AM} = (-t; t-6; 2t-2), \overrightarrow{AB} = (-2; -2; 2)</math></p>	0,25
	<p>Diện tích tam giác MAB là <math>S_{MAB} = \frac{1}{2} \left  \left[ \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \right] \right  = \frac{1}{2} \sqrt{(6t-16)^2 + (4-2t)^2 + (4t-12)^2}</math></p>	0,25
	$= \frac{1}{2} \sqrt{56 \left( t - \frac{19}{7} \right)^2 + \frac{24}{7}} \geq \frac{\sqrt{42}}{7}, \forall t \in \mathbb{R}.$	0,25
	<p>Vậy giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MAB là <math>\frac{\sqrt{42}}{7}</math>, xảy ra khi <math>t = \frac{19}{7}</math> hay  <math>M \left( -\frac{12}{7}; \frac{5}{7}; \frac{38}{7} \right)</math>.</p>	0,25
<b>VIIIb</b> (1,0 điểm)	<b>Giải hệ phương trình</b>	
	Điều kiện $x > 0, y > 0$ (*)	0,25
	<p>Với điều kiện trên bất phương trình đã cho tương đương với</p> <p>HPT đã cho có thể viết lại dưới dạng <math>\begin{cases} e^x - x = e^y - y &amp; (1) \\ \log_3 x - 1 + 4 + 6 \log_3 y = 10 &amp; (2) \end{cases}</math></p>	0,25
	<p>Xét hàm số <math>f(t) = e^t - t</math>, có <math>f'(t) = e^t - 1 &gt; 0, \forall t &gt; 0</math> nên hàm số đồng biến khi <math>t &gt; 0</math>.</p> <p>Từ (1) có <math>f(x) = f(y)</math>, suy ra <math>x = y</math>.</p>	0,25
	<p>Thay vào (2) ta được <math>\log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3</math>. Từ đó suy ra <math>y = 3</math></p> <p>Kết hợp điều kiện (*) ta được HPT đã cho có nghiệm là <math>(x;y) = (3; 3)</math>.</p>	0,25