

A PROBLÉMAMEGOLDÁS ISKOLÁJA

Pólya György

A PROBLÉMAMEGOLDÁS ISKOLÁJA

I. kötet

Typotex, 2010

Az eredeti mű címe

MATHEMATICAL DISCOVERY

On understanding, learning, and teaching problem solving. Volume I.

John Wiley & Sons Inc., New York

Copyright © 1962 by John Wiley & Sons, Inc.

Hungarian translation © Pataki Béláné, Typotex, 2010

ISBN 978-963-279-125-8

Minden jog fenntartva. A letöltött művek három különböző regisztrált számítógépen korlátlan alkalommal olvashatók, valamint összesen egy alkalommal kinyomtathatók.

Bármilyen másolás, sokszorosítás, illetve a fájlok védelmének feltörése tilos!

Az elektronikus kiadást támogatta:



Ez a mű a Tankönyvkiadó 1970-es kiadásának digitalizálásával készült kereshető módon

A digitalizálásra a Typotex Kiadó adott engedélyt

Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa

Az elektronikus kiadás műszaki szerkesztője: Benkő Márta

Felelős szerkesztő: Ambrus Ferenc

Műszaki szerkesztő: Bánfi Ferenc

TARTALOMJEGYZÉK

Előszó	9
Előszó a magyar kiadáshoz	14
Útmutatás az olvasónak	15

ELSŐ RÉSZ

MEGOLDÁSTÍPUSOK

1. fejezet. Két mértani hely	19
1.1. Mértani szerkesztések	19
1.2. A példától a megoldástípusig	20
1.3. Példák	21
1.4. Vegyük megoldottnak a problémát	22
1.5. Hasonló alakzatok	25
1.6. Példák	26
1.7. Segédalakzatok	30

Példák és megjegyzések az 1. fejezethez, 1.1—1.51. [1.7. Jelölések; 1.15. Három világítótorony; 1.42. Ez is hiba 1.44. Visszatekintés; 1.45. Három megfigyelőállás; 1.46. A két mértani hely megoldástípusáról; 1.47. Három mértani hely megoldástípusa; 1.49. A mértani szerkesztésekről; 1.50. További példákat! 1.51. Halmazok]

2. fejezet. A Descartes-féle megoldástípus	37
2.1. Descartes és az egyetemes módszer eszméje	37
2.2. Kicsi kis probléma	38
2.3. Állítsunk fel egyenleteket	41
2.4. Iskolai példák	43
2.5. Mértani feladatok	47
2.6. Egy fizikai feladat	52
2.7. Egy fejtörő	54

2.8. Kis paradoxonok	55
Példák és megjegyzések a 2. fejezethez, 2.1–2.78. (Első rész 2.1–2.16.; Második rész 2.17–2.78.) [2.10. Analogon Heron tételéhez; 2.11. Még egy analogon Pythagoras tételéhez; 2.12. Újabb analogon Pythagoras tételéhez; 2.13. Még egy analogon Heron tételéhez; 2.17. Vegyes; 2.28. Egy egyiptomi probléma; 2.32. Síkmértan; 2.33. Newton egyenletek felállításáról; 2.46. Térmértan; 2.54. Egy egyenlőtlenség; 2.55. Szferometer; 2.56. Grafikus menetrend; 2.64. Annyi egyenlet, ahány ismeretlen; 2.65. Több az egyenlet, mint az ismeretlen; 2.67. Kevesebb az egyenlet, mint az ismeretlen; 2.72. Descartes „Szabálya”; 2.73. Egyszerűsítjük a problémát; 2.74. Szükséges előismeretek. Mozgósítás és szervezés; 2.75. Függetlenség és ellentmondásmentesség; 2.76. A megoldás unicitása, anticipáció; 2.77. Minek a szöveges feladat? 2.78. További példákat!]	
3. fejezet. Rekurzio	73
3.1. Egy kis felfedezés története	73
3.2. Deus ex machina	75
3.3. És mégsem hagyhatjuk ezt kihasználatlanul	77
3.4. Rekurzio	79
3.5. Abrakadabra	81
3.6. Pascal-háromszög	83
3.7. Teljes indukció	86
3.8. Előre a felfedezésre!	88
3.9. Figyeljük meg, általánosítsuk, bizonyítsuk, és másképpen is bizonyítsuk!	89
Példák és megjegyzések a 3. fejezethez, 3.1–3.92. (Első rész, 3.1–3.21.; Második rész, 3.22–3.30.; Harmadik rész, 3.31–3.55.; Negyedik rész, 3.56–3.92.) [3.2. Az általános esettel egyenértékű speciális eset; 3.21. A teljes indukció két alakja; 3.44. Trinomiális együtthatók; 3.51. Leibniz harmonikus háromszöge; 3.52. Pascal és Leibniz; 3.56. Hatványsorok; 3.61. A binomiális tétel tört és negatív kitevőkre; 3.65. Az értelmezési tartomány kiterjesztése; 3.70. Határozatlan együtthatók módszere; 3.75. Hatványsor inverziója; 3.81. Differenciálegyenletek; 3.91. A π számról; 3.92. További példákat!]	
4. fejezet. Szuperpozíció	112
4.1. Interpoláció	112
4.2. Speciális helyzet	114
4.3. Az általános eset	115
4.4. A megoldástípus	117
Példák és megjegyzések a 4. fejezethez, 4.1–4.36. (Első rész 4.1–4.16.; Második rész 4.17–4.36.) [4.11. Lineáris kombináció vagy szuperpozíció; 4.12. Konstans együtthatójú, homogén lineáris differenciálegyenletek; 4.14. Homogén lineáris differenciálegyenletek állandó együtthatókkal; 4.16. Mozgások szuperpozíciója; 4.17. Sokféle kiindulás; 4.18. Mi az ismeretlen? 4.20. Itt van a mienkkel rokon és már megoldott feladat; 4.22. Több előismeret; 4.24. A prizmoidképlet; 4.30. Egy lánc sem erősebb, mint a leggyengébb láncszeme; 4.32. Simpson-szabály; 4.36. Bővítjük ki az alkalmazási területet]	

MÁSODIK RÉSZ

UTBAN AZ ÁLTALÁNOS MÓDSZER FELÉ

5. fejezet. Problémák	129
5.1. Mi a probléma?	129
5.2. A problémák osztályozása	130
5.3. Meghatározó problémák	131
5.4. Bizonyító problémák	133
5.5. Az ismeretlen összetevői, a feltétel részei	134
5.6. Eljárás kerestetik	135
<i>Példák és megjegyzések az 5. fejezethez, 5.1—5.19. [5.8. Bizonyítunk vagy meghatározunk? 5.9. További példákat! 5.10. A megoldási eljárás műveletek végtelen sorozatából is állhat; 5.11. A kör négyszögesítése; 5.12. Sorrend és következmény; 5.13. Szerencsétlen kétértelműség; 5.14. Adatok és ismeretlen, hipotézis és konklúzió; 5.15. Az adatok számbavétele]</i>	
6. fejezet. Az alkalmazási terület bővítése	141
6.1. Descartes-féle megoldástípus	141
6.2. A két mértani hely	145
6.3. Melyik részfeltétellel kezdjük?	150
6.4. Rekurzió	154
6.5. Lépésről lépésre határozzuk meg az ismeretlent	157
<i>Példák és megjegyzések a 6. fejezethez, 6.1—6.25. [6.1. Egy feltétel sok részfeltétellel; 6.9. Vegyük a feltételnek csak egy részét; 6.10. Ariadne fonala; 6.18. További példákat! 6.19. Közbeeső feladatot; 6.20. Grafikus ábrázolás; 6.21. Néhány nem matematikai problémátípus; 6.25. Finomabb osztályozás]</i>	
Megoldások	166
Függelék	220
Útmutatás tanároknak és tanárok tanárainak	220
Irodalomjegyzék	225
Név- és tárgymutató	227

ELŐSZÓ

*Tökéletes a megoldási módszer akkor,
ha kezdettől fogva előre látjuk, sőt be is
bizonyíthatjuk, hogy azt követve, elérjük
célunkat.*

LEIBNIZ: *Opusculæ*, 161. old.

1. Bármilyen probléma megoldása valamilyen nehéz helyzetből kivezető út megtalálását, valamilyen akadály megkerülését jelenti, olyan cél elérését, amelyhez egyébként közvetlenül nem tudtunk volna eljutni. A probléma megoldása az értelem jellegzetes teljesítménye, és az értelem az emberiség jellegzetes képessége: tulajdonképpen a problémamegoldás a legjellemzőbben emberi tevékenység. Könyvem célja a problémamegoldó tevékenység megértése, eszközök ajánlása a tanítására — és természetesen — az olvasó problémamegoldó készségének fejlesztése.

2. A könyv két részből áll. Röviden jellemezni fogom mindkettőnek a célját. A problémamegoldás csakúgy gyakorlat kérdése, mint az úszás, sízés vagy zongorázás. Megtanulni is csak utánpótlás és gyakorlás útján lehet. Nem adhatok bűvös kulcsot, amely minden ajtót megnyit és minden problémát megold, de adhatok utánozható jó példákat és sok alkalmat a gyakorlásra. Aki úszni akar tanulni, annak vízbe kell ugrania, aki problémákat megoldani akar tanulni, annak problémák megoldását kell gyakorolnia.

Erőfeszítésünket akkor kamatoztathatjuk leghasznosabban, ha az előttünk levő problémának azokat a vonásait keressük, amelyek segíthetnek bennünket további problémák megoldásában is. Olyan megoldás, amelyet saját erőnkől értünk el, amelyről olvastunk vagy esetleg csak hallottunk, de amelyet igazi érdeklődéssel és intuícióval követtünk, előnyösen utánozható megoldástípussá lehet hasonló problémák megoldásában. Az I. rész célja az, hogy néhány hasznos megoldástípust ismertessen meg az olvasóval.

Könnyű egy probléma megoldását utánozni, ha feladatunk hozzá nagyon hasonló, de annál nehezebb, vagy alig lehetséges, ha a hasonlóság nem olyan szembeötlő. Az emberben azonban mélyen gyökerezik a vágy több és jobb után: valami korlátozástól mentes fogás után, mely minden probléma megoldására képesítene. Legtöbbünkben ez a vágy csak homályosan él, de tündérmesékben és néhány filozófus írásaiban világosabban nyilvánul meg. Emlekezzünk a mesebeli bűvös szóra, melyre minden ajtó megnyílik. Descartes

egy minden problémát megoldó, egyetemes módszerről elmélkedett, Leibniz már nagyon világosan meg is fogalmazta a „tökéletes módszer” eszméjét. De hát a „tökéletes módszert” nem keresték több sikerrel, mint a közönséges fémeket arannyá változtató bölcsek követ: vannak szép álmok, amelyeknek álmoknak kell maradniuk. Viszont az ilyen elérhetetlen ideálok foglalkoztatják az embert: senki sem járt még a Sarkcsillagon, de azt nézve sokan lelték meg a helyes utat. Ez a könyv nem adhat, és soha semmilyen könyv sem fog adni általános, tökéletes módszert problémák megoldására. De még pár kis lépés is, amelyet az elérhetetlen eszmény felé teszünk, világosabbá teheti gondolkodásunkat, és tovább fejlesztheti problémamegoldó képességünket. A II. rész néhány ilyen lépést körvonalaz.

3. A *heurisztika* a problémamegoldás eljárásainak és módszereinek a tanulmányozása. A „heurisztika” műszó (terminus technicus), amelyet a múltban némely filozófus használt, ma félig feledésbe merült, félig hitelét veszítette, de én nem riadok vissza a használatától: ebben a könyvben a heuristikát igyekszem tárgyalni.

Pontosabban, a heurisztika kézzelfogható és gyakorlati oldalát hangsúlyozom. Igyekszem minden rendelkezésemre álló eszközzel arra csábítani az olvasót, hogy problémákat oldjon meg, és gondolkodjék azokon a módszereken és eszközökön, amelyeket megoldásukra felhasznál.

Az ezután következő fejezetek túlnyomó részében néhány probléma megoldását tárgyalom, részletesen, több oldali megvilágításban. A hivatásos matematikus szemében — ha módszertani szempontok nem érdeklik — ez a tárgyalás túlságosan részletesnek is tűnhetik. De amit én leírok, az nemcsak a megoldás, hanem a megoldásnak létrejötte is, mondjuk a „történeti háttere”. Egy-egy ilyen kázus (eset) történeti háttere a megoldás lépéseinek egymásutánját tárja fel — mutatja, hogyan jöttek rá végül is a megoldásra. Egyben megkísérli azoknak az indítékoknak és álláspontoknak a megértését, amelyek meggyorsítják ezeket a lépéseket. Egy-egy ilyen kázus gondos leírása arra szolgál, hogy valamilyen általános tanácsot vagy követendő példát adjon, amely hasonló helyzetekben irányíthatja az olvasót. Az ilyen tanács vagy megoldástípus explicit megfogalmazását általában különálló pontban tárgyalom, bár első kísérletező megfogalmazásait itt-ott beleszővöm a kázus történeti hátterének részleteibe is.

Minden fejezetet példák és megjegyzések követnek. Amikor az olvasó kidolgozza a példákat, alkalma van hozzáfűzni, világosabbá tenni és kibővíteni azokat a módszertani megjegyzéseket, amelyeket a fejezet szövege nyújt. A példák közé szőtt megjegyzések részben technikailag nehezebbek, vagy elméleti szempontokra mutatnak rá, részben csak alkalmoszerű jegyzetek.

Nem tudom, mennyire sikerült, de nagyon igyekeztem arra, hogy az olvasó közreműködését biztosítsam. Megpróbáltam nyomtatásban rögzíteni mindazt,

amit szóbeli tanításom folyamán az osztályban a legeredményesebbnek találtam. A kázusok bemutatásával igyekeztem az olvasót a kutatás légköréhez hozzászoktatni. Az ajánlott problémák kiválasztásával, megfogalmazásával és beosztásával arra törekedtem, hogy az olvasó érdeklődését, kíváncsiságát és kezdeményezését felébresszem, és egyben bő alkalmat adjak arra, hogy a kutatási helyzetek változatosságát megismerje.

4. Ebben a könyvben többnyire matematikai problémákkal foglalkozom. Ritkán említek nem matematikai problémákat, ám ezek mindig ott vannak a háttérben, gondosan figyelembe is vettem őket. Megkísértem a matematikai problémák olyan kidolgozását, hogy az lehetőség szerint a nem matematikai problémák kezelésére is fényt vessen.

Többnyire elemi matematikai problémákkal foglalkozom ebben a könyvben. Bár ritkán tárgyalok felsőbb matematikai problémákat, mégis ezek vezettek a könyv anyagának megformálásában. Fő forrásom saját kutatásom volt. Nem egy elemi probléma tárgyalása magasabb szintű problémákkal összefüggő tapasztalataimat tükrözi. Eredeti alakjukban ezeket nem foglalhattam volna ebbe a könyvbe.

5. Elméleti célom a heurisztika tanulmányozása, de van emellett másik, sürgető, konkrét, gyakorlati célom is: középiskolai matematikatanárok előkészítésének a megjavítása.

A középiskolai matematikatanárok előkészítésének megfigyelésére és véleményem kialakítására kitűnő alkalmam volt. Az utóbbi éveimet ugyanis középiskolai tanárok tanításának szenteltem. Remélem, hogy aránylag elfogulatlan megfigyelő vagyok, de mint ilyennek, csak egy véleményem lehet: *a középiskolai matematikatanárok előkészítése nem kielégítő*. Továbbá az a véleményem, hogy minden felelős tényezőnek egyaránt osztoznia kell ebben a bírálatban, és ha javítani akarnak a fennálló helyzeten, akkor mind a pedagógia főiskoláknak, mind az egyetemek matematikai tanszékeinek gondosan felül kell vizsgálniuk, hogy mit tudnak nyújtani a tanárjelölteknek.

Milyen tananyagot kell tehát adniuk az egyetemeknek a jövődő középiskolai tanárok előkészítésére? Nem adhatunk választ erre, amíg nincs válasz arra a vele összefüggő kérdésre: *mit adjon a középiskola a tanulóknak?*

Azt gondolhatnók, hogy ez a kérdés nem visz előre, mert annyi különféle vélemény van róla. Úgy tűnik, mintha nem is adhatnánk reá olyan választ, amellyel mindenki vagy a nagy többség egyetérthetne. Sajnos, ez így is van. Ám akad ehhez a kérdéshez olyan szempont, amelyet legalább a szakértők elfogadhatnak.

Minden ismeretünknek *tárgyi tudás* és *gondolkodási készség* az alapja. Ha *valódi és alapos* ismeretünk van a matematikai munka bármely fokáról, legyen az elemi vagy felső fokú, kétségtelenül világossá válik, hogy a matematikában a gondolkodási készség sokkal fontosabb, mint a tárgyi ismeretek elsajátítása.

Ennélfogva a középiskolában csakúgy, mint bármely más szinten, bizonyos mennyiségű tárgyi tudás megtanításán kívül bizonyos irányú *gondolkodási* készséget is fejlesztenünk kell.

Mi a matematikában a gondolkodási készség? A problémamegoldás képessége, mégpedig nemcsak rutinproblémáké, hanem olyanoké is, amelyek bizonyos fokú önállóságot, ítélőképesseget, eredetiséget és alkotóképességet kívánnak. Ennek következtében a matematikatanításban a középiskola legfőbb feladata az, hogy hangsúlyozza a *problémamegoldás módszeres munkáját*. Ez meggyőződésem. Lehet, hogy ebben nem mindenki ért egyet velem, de azt hiszem, abban megegyezhetünk, hogy a problémamegoldásnak bizonyos jelentőséget kell tulajdonítani, és ez egyelőre elég is.

A tanárnak tudnia kell azt, aminek a tanítását elvárják tőle. Tehát tudnia kell azt is, hogy a tanulóknak hogyan mutassa meg a problémák megoldását. — De ha ő maga sem ért hozzá, a tanulókat hogyan tanítsa meg rá? A tanárnak képesnek kell lennie arra, hogy kifejlessze tanítványaiban a gondolkodási és a következtetési készséget. Fel kell ismernie bennük az alkotó gondolkodást, és bátorítania kell őket ebben. Dehát az a képzés amit ő maga kapott, csak kevés figyelmet szentelt arra, hogy valóban elsajátította-e a tanultakat, és egyáltalán nem vette figyelembe, hogy milyen a gondolkodási készsége, milyen a következtetésre, a problémamegoldásra, az alkotó gondolkodásra való képessége. Véleményem szerint itt van ma a legnagyobb hiány a középiskolai matematikatanárok előkészítésében.

Hogy ezt a hiányt pótolni lehessen, ahhoz a tanár tanulmányi anyagában helyet kellene adni a *megfelelő szintű alkotó munkának*. Én problémamegoldó szemináriumok vezetésével igyekeztem ilyen munkára módot nyújtani. Ez a mű azt az anyagot tartalmazza, amelyet szemináriumaim számára gyűjtöttem össze, és egyben utasításokat is ad az anyag felhasználására. (Lásd a kötet végén: „Útmutatás tanárok és tanárok tanárai számára”). Remélem, valamenynyire segíteni fog a matematikatanárok előkészítésében, és éppen ez művem gyakorlati célja.

Bízom abban, hogy mindkét említett célnak — az elméletinek és a gyakorlatinak — szem előtt tartása segített abban, hogy jobb könyvet írjak. Remélem azt is, hogy nem lesz ellentét a várható legkülönbözőbb olvasók érdeklődése között, bár némelyek általában problémamegoldásra, mások saját maguk, megint mások viszont tanítványaik képességeinek továbbfejlesztésére akarják felhasználni a könyvet. Ami megfelel az egyik típusú olvasónak, annak esélye van arra, hogy hasznára legyen a többinek is.

6. Ez a mű két előző könyv folytatása: „How to Solve It” (magyar fordításban: „A Gondolkodás Iskolája”) és „Mathematics and Plausible Reasoning” (egyes fejezeteinek magyar fordítása Varga Tamás: A „Matematika Tanítása” c. szemelvénygyűjteményében jelent meg); az utóbbi két kötetének más-más cí-

me van: „Induction and Analogy in Mathematics” (I. kötet) és „Patterns of Plausible Inference” (II. kötet). Ezek a könyvek kiegészítik egymást anélkül, hogy lényeges átfedést tartalmaznának. Lehet, hogy valamelyik témát egyik is, másik is megtárgyalja, de más eljárással, más példákkal, más részletekkel, más szempontokkal. Ezért nagyjából mindegy, hogy melyiket olvassuk előbb és melyiket később.

Az Olvasó könnyebbségére a három művet összehasonlító és a megfelelő részeket összefoglaló tárgymutatót közlünk e mű II. kötetének végén.

7. Olyan könyv első részét kiadni, amelynek a második része még nincs készen, némi kockázatot rejt magában. (Van egy német közmondás: „Bolondnak ne mutass félig kész házat!”) Ezt a kockázatot ugyan nem volna szabad figyelmen kívül hagyni, de a mű gyakorlati célja miatt mégis úgy határoztam, hogy nem halasztom tovább a kötet kiadását. (Lásd 210. old.)

Ez a kötet a mű első részét tartalmazza („Megoldástípusok”) és két fejezetet a második részből („Útban az általános módszer felé”).

Az első rész első négy fejezetében bővebb a példaanyag, mint a továbbiakban. Alapjában véve az első rész sok tekintetben hasonlít Szegő Gábor és a Szerző analízisprobléma-gyűjteményéhez (lásd Irodalomjegyzék). Vannak azonban nyilvánvaló különbségek is. Ebben a kötetben az ajánlott példák sokkal elemibb szintűek, a módszertani szempontokat pedig nemcsak felvetettem, hanem kifejezetten megfogalmaztam és *megvitattam*.

A második rész második fejezetére Werner Hartkopf egyik új műve inspirált (lásd Irodalomjegyzék). Hartkopf művének csak némely szempontját mutatom be, azokat, amelyek szerintem a legvonzóbbak. Azért mutatom be éppen azokat, mert heurisztikus felfogásomnak legjobban megfelelnek, s azokhoz példákat és kiegészítő megjegyzéseket fűztem.

8. A könyv kéziratának elkészítéséhez a Ford-alapítványból anyagi támogatást adott a Committee on the Undergraduate Program in Mathematics. Köszönetet mondok ezért is és a bizottság erkölcsi támogatásáért is. Köszönetemet fejezem ki a *Journal of Education of the Faculty and College of Education, Vancouver and Victoria* kiadójának, aki lehetővé tette, hogy ebbe a műbe a lapban már megjelent cikkemből részeket illesszek bele. Köszönetemet fejezem ki Gerald Alexanderson, Santa Clara (Kalifornia) és Alfred Aepli, Zürich, professzoroknak a korrektúrák javításában nyújtott hatékony segítségükért.

Zürich, Svájc, 1961. december hó.

PÓLYA GYÖRGY

ELŐSZÓ A MAGYAR KIADÁSHOZ

Jóval több mint fél század előtt jártam én a Markó utcai Főgimnáziumba. Nyolc évig volt matematikánk, de ez az úgynevezett matematika (eltekinthető néhány órától, melyekért én még ma is hálás vagyok Wagner Alajos főigazgató úrnak) igen kevés örömet okozott nekem. Hiszen nehéz nem volt, elég jó osztályzatot kaptam belőle általában úgyszólván tanulás nélkül, de unalmas volt, szürke, érdektelen. Pedig — és ezt nem szemrehányásképpen mondom, csak melankolikusan — érdekes, színes, mulatságos lehetett volna a matematika a gimnáziumban, és felkelthette volna fiatal ambícióinkat.

Igenis, a matematikaóra lehet érdekes és hasznos, és még több is: amint azt Descartes olyan szépen mondta, „hozzászoktathatja szemünket, hogy lássa az igazságot tisztán és világosan”. Szívvel kívánom, hogy hozzanak a matematika-órák a magyar tanulóknak és tanítóknak több örömet, mint nekem hoztak annak idején, és ha ehhez ezen könyv hozzájárulhatna, az nekem okozna örömet.

Stanford University, 1966. február 20.

PÓLYA GYÖRGY

ÚTMUTATÁS AZ OLVASÓNAK

A 2. fejezet 5. pontjára így hivatkozunk: 2.5., a 2. fejezet 5. pontjának 3. alpontjára így: 2.5. (3), a 3. fejezet 61. példájára pedig így: 3.61. példa.

G.I. és MPR a szerző olyan műveinek rövidítése, melyekre a következőkben gyakran fog hivatkozni, lásd az irodalomjegyzéket.

* jelölést példák, megjegyzések, magyarázatok, fejezetek és más rövidebb részek előtt olyankor használunk, ha az elemnél több matematikai tudás szükséges hozzájuk (l. a következő bekezdést). Ha azonban az ilyen rész nagyon rövid, akkor eltekintettünk ettől a jelzéstől.

E könyv legnagyobb része csak elemi matematikai ismereteket kíván, vagyis annyi mértant, algebrát, analitikus mértant (koordináták használatát) és néha trigonometriát, amennyit egy jó középiskolában meg lehet (vagy meg kellene) tanulni.

Azok a problémák, amelyek e könyvben előfordulnak, ritkán kívánnak a középiskolai anyagnál több ismeretet — de valamivel nehezebbek, és így gyakran mégis valamivel felette vannak a középiskolai szintnek. Egyes problémáknak teljes (bár tömör) megoldását adtuk. Másoknál csak a megoldás néhány lépésére mutattunk rá, néha pedig csak az eredményt közöltük.

Némely problémához megadtuk a megoldást megkönnyítő útmutatást (zárójelben). A környező problémák is adhatnak segítséget. — Különös figyelmet érdemel némely fejezetnél a példákat, példacsoportokat megelőző szöveg.

Ha az olvasó komoly erőfeszítést tesz egy probléma megoldására — ez még akkor is haszonnal járhat, ha nem sikerült a megoldást megtalálnia. — Például — belekukkanthat a megoldás egy részébe, megkísérélheti, hogy valamilyen útbaigazítást kapjon belőle, mely hasznos számára —, aztán tegye félre a könyvet és próbálja meg kidolgozni a megoldás hátralévő részét önállóan.

A problémamegoldás módszerein akkor legalkalmasabb elgondolkodni, mikor az olvasó éppen befejezte vagy elolvasta egy példa megoldását, vagy vala-

melyik kázusnak (esetnek) a történetét. Idézzé fel akkor újból az erőfeszítéseit — hiszen éppen csak hogy befejezte feladatát, és így frissek még a tapasztalatai. Az akadályok legyőzéséből még jobban okul majd, ha néhány jó kérdést is feltesz magának: „Mi volt a döntő pont?, mi volt a legnehezebb?, mit csinálhattam volna jobban? Itt valamire nem jöttem rá: mi hiányzott a tudásomból ehhez? Milyen gondolkodási mód kellett volna hozzá? Van-e valami megtanulásra érdemes fogás, amelyet a következő alkalommal hasonló helyzetben felhasználhatok?” Ezek mind jó kérdések, és még nagyon sok ilyen akad — de a legjobb kérdés mégis mindig az, amely spontán ötlik fel bennünk.

ELSŐ RÉSZ

MEGOLDÁSTÍPUSOK

*Minden megoldott probléma szabállyá vált,
amely később más problémák megoldására szolgált.*

DESCARTES: *Oeuvres*, VI. 20—21. old.: Discours de la Méthode

*Ha felleltem néhány tudományos igazságot (s
remélem, hogy e kötet tartalma azt bizonyítja,
hogy leltem néhányat), ezek mind öt vagy hat
alapproblémából következtek vagy származtak,
amelyeket sikerült megoldanom, s amelyeket
úgy tartok számon, mint megannyi csatát, ahol
oldalamra szegődött a hadiszerencse.*

DESCARTES: *idézett mű*, 67. old.

1. FEJEZET

KÉT MÉRTANI HELY

1.1. Mértani szerkesztések

Mértani alakzatok vonalzóval és körzővel való szerkesztése a síkmértan hagyományos tananyagához tartozik. Az ilyen szerkesztések legegyszerűbb fajtáit a műszaki rajzolóok használják fel. Ettől eltekintve a mértani szerkesztések gyakorlati fontossága elhanyagolható, és elméleti jelentősége sem túl nagy. Mégis joggal szerepelnek a tananyagban: rendkívül alkalmasak arra, hogy a kezdőt megismertessék különféle mértani alakzatokkal, különösen pedig arra, hogy bevezessék a problémamegoldó gondolkodásba. Mi az utóbbi okból foglalkozunk mértani szerkesztésekkel.

Mint a matematikatanításban oly sok más hagyomány, a mértani szerkesztések is Euklidészhez nyúlnak vissza; az ő rendszerében fontos szerepet játszanak. Euklidész „Elemei”-ben az első könyv legelső problémája veti fel az „egyenlő oldalú háromszög szerkesztését egy megadott véges egyenes vonal darabon”. Euklidész rendszerében van értelme annak, hogy a problémát csak az egyenlő oldalú háromszögre korlátozza, bár a következő, általánosabb feladat megoldása épp oly könnyű: *Szerkesszük meg a háromszöget három megadott oldalából.*

Szenteljünk egy percet e probléma elemzésére.

Minden problémában kell lennie valami *ismeretlennek* — ha minden ismert, akkor nincs mit keresni, nincs mit kezdeni vele. Feladatunkban az ismeretlen (az, amit keresünk, amit meg akarunk határozni, a *quaesitum*) egy mértani alakzat, egy háromszög.

Viszont minden feladatban kell valami ismertnek vagy *megadottnak* is lennie (a megadottakat nevezzük *adatoknak*) — ha semmi sincs megadva, nincs is semmi, amiből felismerhetnénk a keresett dolgot, még ha véletlenül szemünk elé kerülne, akkor sem tudnánk megállapítani, hogy azt látjuk-e amit keresünk. A mi problémánkban az adat „három véges egyenes vonal darab”, vagyis három szakasz.

Végül minden problémában kell lennie valami *feltételnek*, amely meghatározza, hogyan függ össze az ismeretlen az adatokkal. Feladatunkban a felté-

tel azt követeli meg, hogy a keresett háromszög három oldalának akkorának kell lennie, amekkora a három megadott szakasz.

A feltétel a probléma lényeges része. Hasonlítsuk össze feladatunkat a következővel: „Szerkesszünk háromszöget a három magasságából.” A két problémában az adatok azonosak (három szakasz), és az ismeretlen ugyanolyan típusú mértani alakzat (háromszög). De az ismeretlen és az adatok közti összefüggés különböző, a feltétel különböző, és a problémák is nagyon különbözőek. (A mi problémánk könnyebb.)

Az olvasó természetesen ismeri feladatunk megoldását. Legyen a , b és c a három megadott hosszúságú szakasz. Legyen az a szakasz két végpontja B és C (vegyen az olvasó ceruzát, és vázolja fel az ábrát). Rajzoljunk két kört, egyet C középponttal és b sugárral, a másikat B középponttal és c sugárral; legyen A egyik metszéspontjuk. Akkor ABC a kívánt háromszög.

1.2. A példától a megoldástípusig

Tekintsünk vissza az előző megoldásra. Keressük olyan vonásait, amelyek hasonló problémák megoldásában eredménnyel kecsegtetnek.

Amikor megrajzoljuk az a szakaszt, máris megvan a keresett háromszög két csúcsa, B és C . Csak egy csúcsot kell még megtalálnunk. Azzal, hogy felmértük az a szakaszt, átalakítottuk a felvetett problémát másik, az eredetivel egyenértékű, de attól különböző feladattá. Ebben az új feladatban

- az ismeretlen: egy pont (a keresett háromszög harmadik-csúcsa);
- az adatok: két pont (B és C) és két szakasz hossza (b és c);
- a feltétel azt követeli meg, hogy a keresett pont b távolságra legyen a megadott C ponttól és c távolságra a megadott B ponttól.

Ez a feltétel két részből áll, az egyik b -re és C -re vonatkozik, a másik c -re és B -re. Vegyük a feltételnek csak egyik részét, ejtsük el a másikat; mennyire van így az ismeretlen meghatározva, és milyen mértékben változhat? A síknak azok a pontjai, melyek az adott C ponttól adott b távolságra vannak, nincsenek ugyan egyértelműen meghatározva, de teljesen szabadon sem választhatók: egy „mértani helyre” korlátozódnak, a C középpontú, b sugarú kör kerületére, ehhez a körkerülethez kell tartozniuk a részfeltételt kielégítő pontoknak, de azon bárhol lehetnek. Az ismeretlen pontnak két ilyen mértani helyhez kell tartoznia, és így ezeknek a metszéspontja.

Itt már felismerhetjük a megoldástípust (a „két mértani hely megoldástípusát”), amelyet sokszor jó eredménnyel alkalmazhatunk szerkesztési feladatok megoldásában.

Először vezessük vissza a problémát egy pont megszerkesztésére.

Azután osszuk a feltételt két részre. Ezek mindegyike egy-egy mértani helyet jelent az ismeretlen pont számára; mértani hely csakis egyenes vagy kör lehet.

Jobb a példa, mint a jó tanács! Megoldástípusok pusztán megfogalmazásával nem sokat érünk. Viszont az egyszer felismert megoldástípus minden példával, amelyre sikeresen alkalmazzuk, színesebbé, érdekesebbé és értékeesebbé válik.

1.3. Példák

Csaknem minden szerkesztési feladat, amely a középiskola hagyományos tananyagához tartozik, a két mértani hely megoldástípusának közvetlen alkalmazása.

(1) *Írjunk kört adott háromszög köré.* Vezessük vissza a feladatot a keresett kör középpontjának megszerkesztésére. Az így visszavezetett feladatban

az ismeretlen: egy pont, mondjuk X ;

az adat: három pont, A , B és C ;

a feltétel az, hogy a három távolság egyenlő:

$$XA = XB = XC.$$

Osszuk a feltételt két részre:

$$\text{Először} \quad XA = XB.$$

$$\text{Másodszor} \quad XA = XC.$$

A feltétel mindegyik részének egy-egy mértani hely felel meg. Az első mértani hely az AB szakasz felező merőlegese, a második az AC szakaszé. A kívánt pont, X , e két egyenes metszéspontja.

A feltételt másként is feloszthattuk volna: először $XA = XB$, másodszor $XB = XC$. Ez más szerkesztést jelent. Lehet az eredmény is más? Miért nem?

(2) *Írjunk kört adott háromszögbe.* Vezessük vissza a feladatot a keresett kör középpontjának megszerkesztésére. Az így visszavezetett feladatban

az ismeretlen: egy pont, mondjuk X ;

az adat: három (végtelen) egyenes, a , b és c ;

a feltétel az, hogy az X pont ugyanakkora (merőleges) távolságra van mind a három egyenestől.

Osszuk a feltételt két részre:

Először X egyenlő távolságra van a -tól és b -től.

Másodszor X egyenlő távolságra van a -tól és c -től.

A feltétel első részét kielégítő pontok mértani helye két egymásra merőleges egyenes: az a és b bezárta szögek szögfelezői. A második mértani hely analóg

(hasonló). A két mértani helynek négy-közös pontja van: a háromszögbe írható kör középpontján kívül a három kívülről érintő kör középpontjait is megkapjuk.

Figyeljük meg, hogy a megoldástípusnak ez az alkalmazása szükségessé teszi az 1.2. pont végén adott megfogalmazás csekély módosítását. Mi is ez a módosítás?

(3) *Adott két párhuzamos egyenes és köztük egy pont. Szerkesszünk olyan kört, amely mindkét egyenest érinti, és átmegy az adott ponton.* Ha a keresett ábrát elképzeljük (segít, ha fel is vázoljuk), megfigyelhetjük, hogy a *probléma egyik részét könnyen megoldhatjuk*: a két párhuzamos közötti távolság nyilván a keresett kör átmérője, és így e távolság fele a sugár.

Visszavezettük a problémát az ismeretlen kör középpontjának a megkeresésére.

Most, hogy a kör sugarát, r -et, ismerjük, a feltételt a következőképp fogalmazhatjuk meg:

Először X az adott ponttól r távolságra van.

Másodszor X mindkét adott egyenestől r távolságra van.

A feltétel első része kört, a második része, az adott egyenesekkel párhuzamos középvonalat határoz meg.

Ha nem ismernénk a keresett kör sugarát, akkor a következőképp oszthatnánk fel a feltételt:

Először X ugyanakkora távolságra van az adott ponttól, mint az első megadott egyenestől.

Másodszor X ugyanakkora távolságra van az adott ponttól, mint a második megadott egyenestől.

A feltételnek ez a két részre különítése logikailag kifogástalan ugyan, de nincs haszna: a megfelelő mértani helyek *parabolák*; ezeket azonban körzövel és vonalzóval nem szerkeszthetjük meg. Megoldástípusunknak lényeges része éppen az, hogy a kapott mértani helyeknek kör alakúaknak vagy egyenes vonalúaknak kell lenniük.

Példánk valamit mégis hozzáadott a két mértani hely megoldástípusának jobb megértéséhez. Ez a megoldástípus sok esetben segít, — mint látni fogjuk —, de nem mindegyikben.

1.4. Vegyük megoldottnak a problémát

Vágyálom, ha elképzeljük azt a jót, ami nem a mienk. Egyszer egy éhes embernek csak egy darab száraz kenyere volt, és azt mondta magában: „Ha lenne egy kis sonkám, akkor tojásos sonkát ehetnék, ha ugyan volna tojásom.”

Az emberek azt tartják, hogy a vágyálmok károsak. Ne higgyük; ez csak egyike az általánosan elfogadott tévedéseknek. Károsak, mint ahogy káros túlságosan sok só a levesben, vagy akár parányi fokhagyma a csokoládé-pudingban. Gondolom, a vágyálmok akkor ártanak, ha túlzásba vesszük őket, vagy ha rossz helyen élünk velük, de önmagukban jók. Komoly segítséget jelenthetnek az életben is, problémák megoldásában is. Lehet, hogy az a szegény fickó is jobban élvezte a száraz kenyeret tojásos sonkával fűszerezett vágyálommal. Mi viszont vegyük szemügyre a következő problémát (lásd az 1.1. ábrát).

Adott három pont, A, B és C. Szerkesszünk az AC szakaszt olyan X pontban, a BC szakaszt pedig olyan Y pontban metsző egyenest, melyre:

$$AX = XY = YB.$$

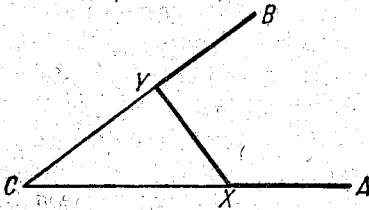
Képzeld el, hogy az X és Y pontok közül az egyiknek a helyzetét ismerjük (ez a vágyalom). Akkor könnyen megtalálhatjuk a másik pontot (rajzoljuk meg a felező merőleget). A baj csak az, hogy egyik pontot sem ismerjük — a feladat nem látszik könnyűnek.

Legyen vágyálmunk még merészebb: *vegyük megoldottnak a problémát*. Tételizzük fel, hogy az 1.1. ábrát problémánk feltételeivel összhangban úgy rajzoljuk, hogy $AXYB$ három egyenlő szakaszból álló törött vonal. Így elképzeltünk valami olyat, amit még nem értünk el: azt, hogy az XY vonal keresett helyzetét megtaláltuk; azt képzeljük, hogy *megtaláltuk a megoldást*.

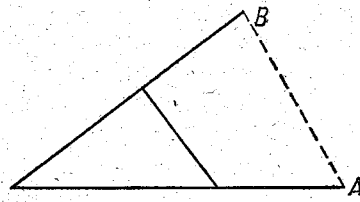
Most jó lesz, ha elővesszük az 1.1. ábrát. Ez tartalmazza mindazokat a mértani elemeket, amelyeket meg kell vizsgálnunk; azokat is, amelyek már megvannak és azokat is, amelyekre még szükségünk volna. Az adatokat és az ismeretlent: elrendezve úgy, ahogyan azt a feltétel megköveteli. Az ábrát szemügyre véve töprenghetünk egyrészt azon, hogy az adatokból milyen hasznos elemeket szerkeszthetünk meg, másrészt azon is, hogy az ismeretlen megszerkesztéséhez milyen elemeket használhatunk. Akár az adatokból kiindulva, előre, akár az ismeretlenből kiindulva visszafelé oldjuk meg a feladatot — esetleg kitérővel is próbálkozhatunk, mindenképp tanulságos lesz.

Vajon össze tudjuk-e rakni most már a képes kirakó néhány darabját? *Meg tudjuk-e oldani a probléma valamelyik részét?* Az 1.1. ábrán az $XCY \triangle$ -et látjuk. Meg tudjuk-e szerkeszteni? Ehhez három adat kellene, de — sajnos — nekünk csak egy van (a C-nél levő szög).

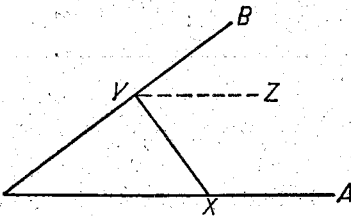
Használjuk azt, amink van; amink nincs, azt úgysem használhatjuk. *Levezethetünk-e valami hasznosat az adatokból?* Igen, könnyű az adott A és B pontokat összekötni, s ez az összekötő egyenes hasznos lehet; rajzoljuk meg (1.2. ábra). De nem olyan könnyű meglátni, *hogyan* válhat hasznossá az AB egyenes. — Ejtsük inkább el?



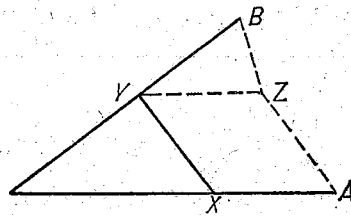
1.1. ábra. Ismeretlen, adatok, feltétel



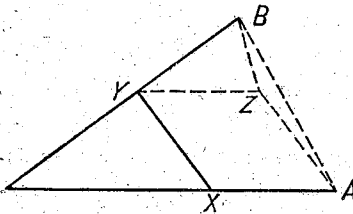
1.2. ábra. Induljunk ki az adatokból



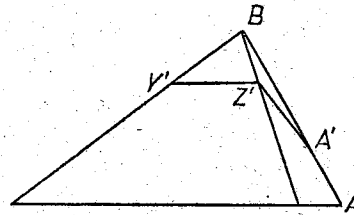
1.3. ábra. Induljunk ki az ismeretlenből



1.4. ábra. Kapcsolat korábbi ismereteinkkel



1.5. ábra. Szuperpozíció



1.6. ábra. A megoldás nyitja

Az 1.1. ábra olyan üresnek tűnik. Kétségtelen, hogy a kívánt szerkesztéshez több vonalra lenne szükség — de milyen vonalakra?

Az AX , XY és YB szakaszok egyenlők (mi egyenlőknek tekintjük őket — „vagyálom”!). De most olyan esetlen az egymáshoz viszonyított helyzetük — egyenlő szakaszokat sokkal csinosabb ábrába is lehet rendezni. Talán ki egészíthetnénk az ábrát még néhány ugyanakkora szakasszal — vagy épp még csak eggyel.

Jó szerencse vagy ihlet arra késztet, hogy húzzunk még egy szakaszt az ábrába; egészen jól beleillik: rajzoljuk meg az XA -val egyenlő és párhuzamos YZ szakaszt; lásd az 1.3. ábrát. (Most a keresett ismeretlenből indultunk ki — „vagyálom” —, és megpróbáltunk visszajutni az adatokhoz.)

Az YZ szakasz bevezetése próbálkozás volt. Lám, ez a szakasz nem is mutat rosszul, ismert idomokat visz az ábrába. Kössük össze Z -t A -val és B -vel, lásd az 1.4. ábrát; az $XAZY$ rombuszt és a BYZ egyenlő szárú háromszöget nyerjük. *Vajon megoldhatjuk-e a probléma valamelyik részét?* Megszerkeszthetjük-e a $BYZ \triangle$ -et? Egyenlő szárú háromszög megszerkesztéséhez két adat szükséges, de — sajnos — nekünk ebből csak egy van (az Y -nál levő szög egyenlő a C -nél levő, megadott szöggel). Valamire mégis jutottunk. Ha nem is ismerjük a $BYZ \triangle$ -et teljesen, de ismerjük az alakját. Ha nem is tudjuk a méreteit, de szerkeszthetünk hozzá hasonló háromszöget.

Ez kissé közelebb vezethet a megoldáshoz, de nem jutunk el hozzá, még egyet-mást meg kell próbálnunk. Előbb-utóbb talán eszünkbe ötlük egyik korábbi próbálkozásunk (1.2. ábra). Hogyan köthetnénk össze későbbi tapasztalatainkkal? Az 1.2. és 1.4. ábrák egyesítéséből nyerjük az 1.5. ábrát, amelyben új háromszög van, $BZA \triangle$. Megszerkeszthetjük? Meg, ha ismerjük a $BYZ \triangle$ -et; ebben a kedvező esetben kiválaszthatunk három adatot: két oldalt (ZB és $ZA = ZY$), és a B -nél levő szöget. Csakhogy nem ismerjük a $BZA \triangle$ -et, vagy legalábbis nem teljesen, csupán az alakját. Akkor hát...

Megrajzolhatjuk a $BYZA$ négyszöghöz (1.5. ábra) hasonló $BY'Z'A'$ négyszöget (1.6. ábra), és ez a négyszög már a keresett alakzat lényeges része. Ez lehet a megoldás nyitja.

1.5. Hasonló alakzatok

Végezzük el most már azt a szerkesztést, amelynek felfedezéséhez az 1.1—1.6. ábrák sorozata vezetett.

Az adott BC szakaszon válasszunk tetszőlegesen egy Y' pontot (de B -től ne túlságosan távol). Rajzoljuk meg a CA -val párhuzamos $Y'Z'$ szakaszt úgy, hogy

$$Y'Z' = Y'B$$

legyen. Azután határozzuk meg az AB szakasznak azt az A' pontját, melyre

$$A'Z' = Y'Z'.$$

Húzzunk az A ponton át $A'Z'$ -vel párhuzamost, ennek a BZ' szakasz meghosszabbításával való metszéspontja a keresett Z pont. A többi már könnyű.

Az $AZYB$ és $A'Z'Y'B$ négyszögek nemcsak hasonlóak, hanem „hasonló helyzetűek” (homotétikusak) is. B pont a hasonlósági középpontjuk. Más szóval a két hasonló idom megfelelő pontjait összekötő egyeneseknek a B ponton kell átmenniük.

Itt meg kell jegyeznünk valamit, ami általánosabb érdekű: *AZYB*-t, a két hasonló alakzat közül azt, amelyekre előbb figyeltünk fel, később szerkesztettük meg¹.

Az előző feladat általános megoldástípushoz vezet: *ha nem tudjuk meg-szerkeszteni a keresett alakzatot, akkor keressünk lehetőséget hasonló alakzat szer-kesztésére.*

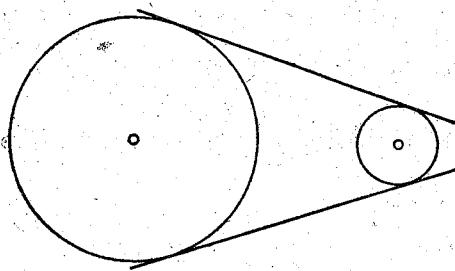
Ha az olvasó megoldja azon ide tartozó példákat, amelyeket a fejezet végén talál, maga is meggyőződhet hasonló alakzatok megoldástípusának hasznosságáról.

1.6. Példák

A következő példák többféle vonatkozásban különböznek egymástól; a köz-tük levő különbségek még világosabbá teszik azt a közös vonást, amelyet **ki** akarunk emelni.

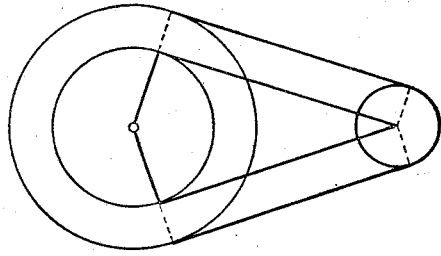
(1) *Szerkesszük meg két adott kör közös érintőit.* Ismerjük a két kör kölcsönös helyzetét (rajzunkból indulunk ki). Olyan egyeneseket akarunk szerkeszteni, amelyek mindkét kört érintik. Ha a köröknek nincs közös pontja, akkor négy közös érintőjük van, két külső és két belső. Figyeljük most csak a külső érintő-ket, nézzük meg az 1.7. ábrát; ezek mindig léteznek, kivéve, ha az egyik kör teljesen a másik belsejében van.

Ha nem tudjuk megoldani a felvetett problémát, nézzünk körül alkalmas, rokon probléma után. Van is a mienkhez-szembenetűően rokon probléma (feltételezzük, hogy az olvasó ismeri is a megoldást): szerkesszünk külső pontból egy adott körhöz érintőt. Ez a problémánk határ-, illetve elfajult esete; az egyik kör



1.7. ábra. Ismeretlen, adatok, feltétel

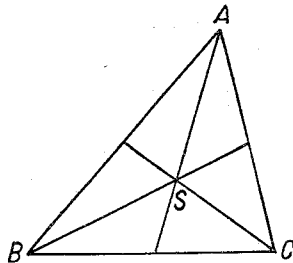
¹ A kázusnak a leírásában, amelyet most fejeztünk be (és az 1.4. pontban kezdtünk -el) a figyelemre leginkább méltó lépés az volt, hogy a „problémát megoldottnak vet-tük”. Lásd erről még G. I. 66. old. és Pappus 192–198. old., különösen a 196–197. old.



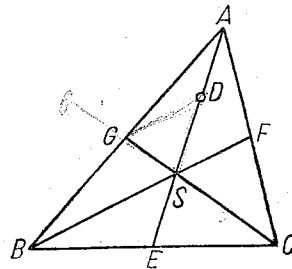
1.8. ábra. A megoldás nyitja

ponttá zsugorodik. Ehhez az elfajult esethez a legtermészetesebb módon az adatok változtatásával juthatunk el. Az adatokat a legkülönbébb módon változtathatjuk: csökkentjük az egyik sugarat, változatlanul hagyjuk a másikat; vagy csökkentjük az egyik sugarat, növeljük a másikat; vagy csökkentjük mindkettőt. Így az az ötletünk támadhat, hogy mindkét sugarat *ugyanolyan mértékben* csökkentjük, vagyis mindkettőt ugyanannyival vegyük rövidebbre. Ezt a változást szemlélve, megfigyelhetjük, hogy mindkét közös érintő eltolódik, mégpedig az eltolódás folyamán önmagával párhuzamosan, míg végül megjelenik az 1.8. ábra — és ez már a megoldás: szerkesszünk érintőket a kisebb kör középpontjából egy olyan, a nagyobbikkal koncentrikus körhöz, melynek a sugara a két megadott kör sugarának a különbsége. Az így kapott ábra lesz a megoldás nyitja, innen a kívánt ábrához már könnyen eljutunk (csak két téglalapot kell még megszerkesztenünk).

(2) Szerkesszünk háromszöget a három súlyvonalából. „Megoldottnak vesszük a problémát”; azaz megrajzoljuk a kívánt háromszöget és benne megfelelően a három súlyvonalat (lásd az 1.9. ábrát). Emlékezzünk vissza arra, hogy a súlyvonalak egy pontban metszik egymást (S pont az 1.9. ábrán a háromszög súlypontja); ez a pont mindegyik súlyvonalat $1 : 2$ arányban osztja. E lényeges tény szemléltetésére jelöljük az AS szakasz középpontját D -vel; D és S az AE súlyvonalat három egyenlő részre osztják (lásd az 1.10. ábrát).



1.9. ábra. Ismeretlen, adatok, feltétel



1.10. ábra. Egyedülálló pont összeköttetést keres

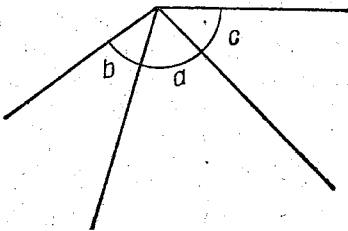
A keresett háromszöget a súlyvonalak hat kis háromszögre osztják. *Megoldhatjuk-e a probléma egy részét?* Valamelyik kis háromszög megszerkesztéséhez három adatra van szükségünk; mi csak két oldalt ismerünk: egyik oldal harmada az egyik megadott súlyvonalnak, a másik oldal kétharmada valamelyik másik megadott súlyvonalnak — de a harmadik adat hiányzik. Bevezethetnénk-e valamely más háromszöget, amelynek három adatát ismerjük? Az *1.11. ábrán* ott van a D pont, nyilván még összeköttetést kíván. Kössük össze egy közelfekvő ponttal. Észrevehetjük, hogy az SDG háromszög minden oldala egy-egy súlyvonal harmada és így három ismert oldalból megszerkeszthetjük. Ez a megoldás nyitja! A többi már könnyű.

Minden közöséges háromszögre vonatkozó feladatnak van gömbháromszögre vagy három oldalú testszögletre vonatkozó megfelelője. (A három oldalú testszögletet három olyan sík határolja, amelyeknek egy közös pontjuk van. E pont, mint középpont köré írt gömbfelület a testszögletet gömbháromszögben metszi.) Ezek a térmértani problémák síkmértani problémákra vezethetők vissza. A térbeli alakzatokra vonatkozó szerkesztési problémák síkbeliekre való visszavezetése az ábrázoló geometria problémakörébe tartozik. A geometriának ez az érdekes ága a mérnökök és építészek nélkülözhetetlen segédeszköze gépek, hajók, épületek stb. tervezésében.

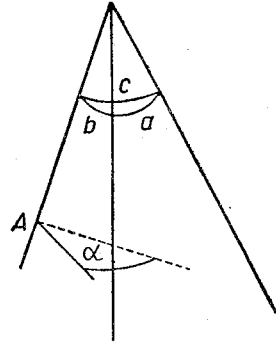
Az olvasónak nincs szüksége ábrázoló geometriai ismeretekre, csak egy kis térmertanra és józan észre, hogy megoldja a következő problémát: *ismerjük egy háromoldalú testszöglet oldalait* (így nevezzük az élek bezárta szögeket), *szerkesszük meg a lapszögeit* (a lapok bezárta szögeket).

Jelöljük a testszöglet oldalait a , b és c -vel (ezek egyben a gömbháromszög megfelelő oldalai), és α -val az a oldallal szemben fekvő lapszöget (α a gömbháromszög egyik szöge); a , b és c adottak, szerkesszük meg α -t. (Mindhárom lapszög szerkesztése ugyanazzal a módszerrel adódik, ezért elég csak az egyik, pl. α szerkesztéséről beszélni.)

Az adatok szemléltetésére képzeljük síkban kiterítve az egymáshoz csatlakozó b , a és c szögeket (lásd az 1.11. ábrát). Az ismeretlen szemléltetésére azonban az alakzatot térben kell látnunk. (Az 1.11. ábrát állítsuk elő kartonpapíron,



1.11. ábra. Az adatok



1.12. ábra. Az ismeretlen

hajtsuk be az a és b , majd a és c közti egyenesek mentén, s akkor a kartonpapírból elkészíthetjük a testszögletet.) Az 1.12. ábrán a testszögletet perspektivikusan láthatjuk; válasszunk az a oldallal szemben levő élen egy tetszőleges A pontot; állítsunk erre az élre két, A -ból kiinduló merőleget, egyiket b , másikat c oldal síkjában; ezek alkotják a megszerkesztendő α szöget.

Szemléljük az ismeretlent! — Szöveget keresünk, az 1.12. ábra α szögét. Hogyan határozzunk meg ilyen típusú ismeretlent? Szöveget többnyire háromszögből szoktunk meghatározni.

Van háromszög az ábránkon? — Nincsen, de könnyen berajzolhatunk egyet.

Erre azonnal kínálkozik is lehetőség: az α szöget tartalmazó sík a testszögletet háromszögben metszi (lásd az 1.13. ábrát). Ez a háromszög sokat ígérő segédalakzat, alighanem ez a probléma nyitja.

Most már a megoldás nincs is messze. Térjünk vissza síkbeli ábránkhoz (1.11. ábra); ezen az adatok — az a , b és c szög — valódi méretükben vannak feltüntetve. (Terítsük ki a kartonmodellt, melyet összehajtottunk, mikor áttértünk az 1.11. ábráról az 1.12. ábrára.) Az A pont kétszer jelenik meg, mint A_1 és A_2 (a kiterítéssel szétválasztottuk a térben szomszédos b és c oldalakat). A_1 és A_2 a testszöglet V csúcsától egyenlő távolságra vannak. Az A_1 ponton át az A_1V -re állított merőleges a b szög másik szárát C pontban metszi, hasonló módon nyerhetjük B pontot is, lásd az 1.14. ábrát. Most már ismerjük az A_2B , BC és CA_1 szakaszt, vagyis az 1.13. ábrába berajzolt segédháromszög mindhárom oldalát. Ezt a háromszöget tehát könnyen megszerkeszthetjük; (lásd az 1.14. ábrán a szaggatott vonalakat); ez tartalmazza a keresett α szöget is.

A most megbeszélte probléma hasonló az 1.1. pontban már megtárgyalt síkháromszög legegyszerűbb szerkesztéséhez. Itt is az a szerkesztés szolgáltatja a megoldást. Látjuk tehát az analógia használatának az előnyét és egyben útmutatást kapunk alkalmazására.

lehetőséget hagy, de kevesebb határozott irányító jelzést nyújt, mint a *hasonló alakzatoké*. A két mértani hely megoldástípusa a lehető legegyszerűbb — az esetek zömében először ezt próbáljuk alkalmazni, hiszen mindig a legegyszerűbbel célszerű kezdeni. De ne bízzuk el magunkat, tartsuk nyitva a szemünket! Tekintsük megoldottnak a problémát, rajzoljunk olyan ábrát, amelyben az ismeretlen és az adatok alkalmasan együtt vannak, mindegyik a megfelelő helyen. Mindegyik elemet olyan kapcsolatnak kell fűznie a többihez, amelyet a *feltétel* megkövetel. Tanulmányozzuk ezt az ábrát, próbáljunk benne valami ismerős alakzatot felismerni, próbáljuk meg feléleszteni az ehhez szükséges ismereteinket (rokon problémák, alkalmazható tételek), nézzünk körül, mi lehet a kezdő lépés (pl. az ábra leghozzáférhetőbb része). Háttha szerencsénk lesz, és az ábra valami jó ötletet, alkalmas segédvonalat, megfelelő megoldástípust, vagy más, hasznos lépést juttat eszünkbe.

Példák és megjegyzések az 1. fejezethez*

1.1. Mi a mértani helye azon pontoknak, melyek egy adott ponttól megadott távolságra vannak?

1.2. Mi a mértani helye azon pontoknak, melyek egy adott egyenestől megadott távolságra vannak?

1.3. Egy pont úgy mozog, hogy két adott ponttól egyenlő távolságra marad. Mi a pont mértani helye?

1.4. Mi a mértani helye azon pontoknak, melyek két megadott párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra vannak?

1.5. Mi a mértani helye azon pontoknak, melyek két adott, egymást metsző egyenestől egyenlő távolságra vannak?

1.6. Adott egy háromszögnek két csúcsa, A és B , és az AB oldallal szemben fekvő szöge, γ ; így a háromszög nincsen meghatározva, a harmadik csúcsa változhat. Mi a mértani helye a harmadik csúcsnak?

1.7. *Jelölések.* Háromszögekkel kapcsolatosan használjuk a következő szokásos jelöléseket:

A, B, C	csúcsok,
a, b, c	oldalak,
α, β, γ	szögek,
m_a, m_b, m_c	magasságvonalak (magasságok),
s_a, s_b, s_c	súlyvonalak,
f_a, f_b, f_c	belső szögfelezők,
R	a körülírható kör sugara,
r	a beírható kör sugara.

* Az alábbi mértani helyek síkban értendők. (Szerk.)

Jelöljük a -val az α szöggel szemben fekvő oldalt. Az α szög A csúcsa az m_a, s_a, f_a szakaszok közös végpontja. A szokásos használatnak megfelelően az oldalt (amely egy szakasz) és az oldal hosszát egyaránt a -val jelöljük; az olvasó megérti majd a szövegből, hogy melyikről van szó. Ugyanilyen kettős értelme van az $a, b, c, \dots, f_c, R, r$ szimbólumoknak. Bár tulajdonképpen kifogásolható, mégis ezt a jelhasználatot követjük.

„Háromszög a, b, c -ből” jelentése természetesen „szerkesszünk háromszöget, ha adott három oldala a, b és c ”. Figyeljük meg, hogy ha az adatokat kedvezőtlenül választjuk, akkor nincs megoldás (nem létezik olyan idom, amely a kívánt feltételeknek eleget tesz); pl., ha $a > b + c$, akkor nincs olyan háromszög, melynek oldalai a megadott a, b és c hosszúságú szakaszok. Először kísérletezzünk olyan adatokkal, amelyekből a kívánt idomot valószínűleg meg lehet szerkeszteni.

1.8. Háromszög a, b, s_a -ból.

1.9. Háromszög a, m_a, s_a -ból.

1.10. Háromszög a, m_a, α -ból.

1.11. Háromszög a, s_a, α -ból.

1.12. Adott három egyenes. Szerkesszünk kört, mely az első kettőt érinti, és középpontja a harmadikon van.

1.13. Adott két végtelen, egymást metsző egyenes és egy r hosszúságú szakasz. Szerkesszünk olyan r sugarú kört, amely az adott egyeneseket érinti.

1.14. Szerkesszünk kört, ha adott egy pontja, egy érintője és a sugara.

1.15. Három világítótoronyt látunk egy hajóról; ismerjük a térképen helyzetüket, és megmérjük a felőlük érkező fénysugarak alkotta szögeket. Jelöljük ki a térképen a hajó helyzetét.

1.16. Adott körbe írjunk három egyenlő sugarú kört úgy, hogy azok egymást és az adott kört érintsék. (Ezt az idomot néha gótikus ablakon láthatjuk, ahol az emléttetthet hasonló idomok — négy vagy hat belső körrel gyakoriak.)

1.17. Keressünk adott háromszög belsejében olyan pontot, melyből a háromszög mindhárom oldala ugyanakkora szög alatt látszik.

1.18. Osszuk fel adott háromszög területét három egyenlő területű részre. Ezen a következőt értjük: az $ABC \triangle$ belsejében az X pontot úgy határozzuk meg, hogy az $XBC \triangle$, $XCA \triangle$ és $XAB \triangle$ területe egyenlő legyen.

[Vegyük csak a feltétel egy részét, ejtsük el a másikat: mi a mértani helye X -nek, ha csak az $XCA \triangle$ és $XCB \triangle$ -ről tételezzük fel, hogy egyenlő a területük? A választ utat mutathat a megoldáshoz, de másképp is elindulhatunk.]

1.19. Háromszög a, α, r -ből.

[Vegyük csak a feltétel egy részét, ejtsük el a másikat: hagyjuk figyelmen kívül r -et, vegyük csak a -t és α -t; mi a mértani helye a beírható kör középpontjának?]

1.20. Háromszög a, m_b, c -ből.

1.21. Háromszög a, m_b, f_c -ből.

1.22. Háromszög a, m_b, m_c -ből.

1.23. Háromszög m_a, m_b, β -ből.

1.24. Háromszög m_a, β, γ -ből.

1.25. Háromszög m_a, f_a, α -ból.

1.26. Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott az egyik oldala és két átlója.

1.27. Szerkesszünk trapéz, ha adott négy oldala, a, b, c és d ; a és c legyenek a párhuzamos oldalak.

1.28. Szerkesszünk négyszöget, ha adott négy oldala a, b, c és d ; továbbá az a és c szemben fekvő oldalak meghosszabbításakor keletkező ε szög.

1.29. Háromszög $a, b + c, \alpha$ -ból.

[Ne mulasszuk el berajzolni az ábrába az összes adatot. Hol van $b + c$ „megfelelő helye”?]

1.30. Háromszög $a, b + c, \beta - \gamma$ -ból.

1.31. Háromszög $a + b + c, m_a, \alpha$ -ból.

[Szimmetria: b és c (amelyek nincsenek megadva) felcserélhetők.]

1.32. Adott két, teljesen egymáson kívül fekvő kör, rajzoljuk meg közös belső érintőiket. (A körök egy közös külső érintő egyenesük ugyanazon félsíkjaiban, közös belső érintőegyeneseiknek viszont különböző félsíkjaiban fekszenek.)

1.33. Adott három egyenlő sugarú kör. Szerkesszünk olyan kört, amely mindhármat tartalmazza és érinti.

1.34. Háromszög α, β, f_c -ből.

1.35. Adott derékszögű háromszögbe írjunk négyzetet. A négyzet egyik csúcsa essen egybe a háromszög derékszögének csúcsával, a szemben levő csúcsa fekszen az átfogón, a másik két csúcsa pedig egy-egy befogón.

1.36. Adott ABC háromszögbe írjunk négyzetet. Két csúcsa fekszen az AB , egy-egy csúcsa az AC , illetve BC oldalon.

1.37. Adott körökbe írjunk négyzetet. Két csúcsa a köríven, egy-egy csúcsa a körök középponti szögének egy-egy szárán fekszen.

1.38. Szerkesszünk kört, ha adott két pontja és egy érintője.

1.39. Szerkesszünk kört, ha adott egy pontja és két érintője.

1.40. Szerkesszünk kör köré írható ötszöget, ha adott mind az öt szöge ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$) és a kerülete (k). Természetesen $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540^\circ$ feltételnek teljesülnie kell.

1.41. Háromszög m_a, m_b, m_c -ből.

1.42. Ez is hiba. Előfordulhat, hogy valamilyen mértani szerkesztésnek nincs megoldása: nincs olyan alakzat, amely az előírt adatokkal az előírt feltételt teljesítené. Nem létezik a, b és c oldalhosszú háromszög, ha $a > b + c$. Ha volna tökéletes problémamegoldó módszer, az vagy az előírt feltételt kielégítő alakzat szerkesztésére vezetne, vagy megmutatná, hogy ilyen alakzat nem is létezhet.

Előfordulhat még a következő is: a felvetett problémának van megoldása, de a segédproblémának nincs — lehetetlen azt a segédalakzatot megszerkesztteni, amely tervünk szerint szükséges az eredetileg keresett alakzat szerkesztéséhez. Természetesen ez tervünknek a hibája.

Hiánytalan-e ebből a szempontból az 1.41. példa megoldási módszere? (Az a háromszög, melynek oldalai 65, 156, 169 hosszúságúak, derékszögű háromszög; — az oldalak ugyanis 5, 12, 13-mal arányosak — a magasságvonalak hossza pedig 156, 65, 60.) Ha a válasz „nem”, akkor tudjuk-e tökéletesíteni módszerünket?

1.43. Háromszög a, α, R -ből.

1.44. Visszatekintve az 1.43. példa megoldására, felvethetünk néhány tanulságos kérdést és rokon problémát:

a) Analóg probléma?

b) Általánosabb probléma?

c) Háromszög a, β, R -ből.

d) Háromszög a, r, R -ből.

1.45. Három megfigyelőállás. Az ellenség ágyúzását A, B és C megfigyelőállásban figyelik, és azt az időpontot, amelyben egy bizonyos ágyút meghallanak, pontosan regisztrálják. E három adat alapján jelöljük ki az ágyú x helyzetét.

A hang terjedési sebességét vegyük ismertnek.

Magyarázzuk meg, mi az analógia és mi a különbség a fenti és az 1.15. számú — három világitótoronyról szóló — példa között?

1.46. *A két mértani hely megoldástípusáról.* Alkalmazható-e az 1.2., 1.5. és 1.6. példában szereplő mértani helyekre a két mértani hely megoldástípusa? (Lásd az 1.2 pont utolsó dőlt betűs mondatát!)

1.47. *Három mértani hely megoldástípusa.* Síkmértani fogalmaknak a térmértanban különböző analógiái lehetnek. Például az 1.6. (3) alpontban egy síkháromszög analógonjának vagy gömbháromszöget, vagy háromoldalú testszögleket tekintettünk, de egy tetraédert is tekinthetnénk annak. Ebből a szemszögből 1.3. (1) analógonja a következő:

Adott tetraéder köré írjunk gömböt.

Dolgozzuk ki néhány részlet analógiáját. Vezessük vissza a feladatot a kívánt gömb középpontjának megkeresésére. Ebben a visszavezetett feladatban

az ismeretlen: egy pont, mondjuk X ;

az adat: négy pont (a megadott tetraéder csúcsai), mondjuk A, B, C és D ;

a feltétel a négy távolság egyenlősége:

$$XA = XB = XC = XD.$$

A feltételt három részre oszthatjuk:

Először	$XA = XB.$
Másodszor	$XA = XC.$
Harmadszor	$XA = XD.$

Mindegyik résznek egy-egy mértani hely felel meg. Ha az X pont a feltételnek csak az első részét elégíti ki, akkor mértani helye az AB egyenesszakaszra a felezőpontjában állított merőleges sík (vagyis a pont szabadon mozoghat ezen a síkon); a másik két résznek is egy-egy analóg sík felel meg. Végül a gömb keresett középpontja e három sík metszéspontja lesz.

Tételezzük fel, hogy megvannak az eszközeink három adott felület metszéspontjainak a meghatározásához, ha azok sík vagy gömbfelületek. (Tulajdonképp ezt — burkoltan — az előbbieken is feltételeztük. Mellesleg a körző és a vonalzó ilyen eszközök — és meg is tudjuk velük határozni ezeket a metszéspontokat, ha megvan hozzá a kellő ábrázoló geometria tudásunk.)

Így már felvethetünk és meg is oldhatunk térmértani szerkesztéseket. Az előző probléma csak példa erre. Jó példa a megoldása is: analógia segítségével kibogozhatjuk belőle a térmértani szerkesztések megoldástípusát; *a három mértani hely megoldástípusát.*

1.48. Az előző, 1.47. példában, valamint az 1.3. (1) alpont példájában a feltételt másképp is feloszthattuk volna, és akkor más (mindenesetre nagyon hasonló) szerkesztéshez jutottunk volna. Különbözhet-e az eredmény is? Miért nem?

1.49. *A mértani szerkesztésekről.* Sok olyan feladat van, melyben a keresett alakzat szemmel láthatóan „létezik”, de körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető meg (viszont más — hasonlóképpen idealizált, tökéletesnek képelt eszközökkel — megszerkeszthető lenne). Ilyen híres probléma a szög harmadolása: nincs olyan eljárás,

amellyel bármely szöveget körzővel és vonalzóval három egyenlő részre lehetne osztani; lásd Courant és Robbins, 137., 138. old.

A tökéletes módszer *vagy* a keresett alakzat körzővel és vonalzóval való szerkesztéséhez vezetne, *vagy* megmutatná, hogy az lehetetlen. Az ismertetett megoldástípusok (két mértani hely, hasonló idomok, segédalakzat) hasznosak, erről — remélem — az olvasónak volt alkalma meggyőződni, de egyik sem biztosít tökéletes módszert; ötletet adhatnak egyes esetekben, de ha semmilyen szerkesztés sem jut eszünkbe, akkor bizonytalanságban maradunk afelől is, ami pedig a leginkább érdekelné: hogy lehetetlen-e a szerkesztés, vagy csak az ötletünk kevés hozzá?

Van a mértani szerkesztésnek közismert, tökéletes módszere is (az algebrára való visszavezetés — de most ne bocsátkozzunk részletekbe).

Máskor azonban szembekerülhetünk más típusú problémával is, amelynek ez idő szerint nincs tökéletesen módszeres megoldása. És nekünk mégis meg kell kísérelnünk a megoldást! Az átgondolt példák így épp a bennük rejlő hiányossággal vihetik előbbre a problémamegoldásra való nevelést.

1.50. További példákat! Találjunk ki néhány feladatot, amelyek az ebben a fejezetben vizsgáltakhoz hasonlóak, de azoktól mégis különböznek — lehetőleg olyanokat, amelyeket meg is tudunk oldani.

1.51. Halmazok. A halmazok fogalmát nem definiálhatjuk nála alapvetőbb fogalommal, mert ilyen nincs. A halmaz fogalommal mindenki ismerős, még ha nem is használja éppen ezt a szót. „Elemek halmaza” lényegében ugyanazt jelenti, mint „objektumok osztálya”, vagy „dolgok együttessége”, vagy valamilyen „egyedek összessége”. „Azok a tanulók, akik ebből a tárgyból majd jelest kapnak” akkor is halmazt alkotnak, ha pillanatnyilag még a nevüket sem tudjuk. „Azok a pontok a térben, melyek két adott ponttól egyenlő távolságra vannak” a pontoknak nagyon világosan meghatározott halmazát alkotják: egy síkot. „Azok az egyenesek, amelyek egy adott síkban egy adott ponttól adott távolságra vannak” nagyon érdekes halmazt alkotnak, ez a halmaz egy kör összes érintő egyeneséből áll. Ha a , b és c három különböző tárgy, akkor az a halmaz, melynek ez a három tárgy alkotja az elemeit, világosan definiált.

Két halmaz *egyenlő* (azaz megegyező vagy azonos, identikus), ha bármelyik elem, amely az egyikhez tartozik, a másikhoz is hozzátartozik. Ha az A halmazhoz tartozó minden elem a B -hez is hozzátartozik, akkor azt mondjuk, hogy B tartalmazza A -t; ezt is sokféleképp lehet kifejezni: B tartalmazza A -t, A benne van B -ben, A részhalmaza B -nek és így tovább.

Sokszor hasznos az *üres halmazról* is beszélni: arról a halmazról, melyhez nem tartozik elem. Pl. „Olyan tanulók halmazáról, akik ebből a tárgyból majd jelest kapnak” kiderülhet, hogy üres halmaz; pl. ha jónál jobb jegyet senki sem kap, vagy ha a tanítást nem folytatnánk, és így az osztályozás is elmaradna. Az üres halmaz éppúgy használható halmaz, mint ahogyan a 0 is használható szám. A 0 minden pozitív egész számnál kisebb, hasonlóan az üres halmaz is bármely halmaz részhalmazának tekinthető.

Több halmaz legnagyobb közös részhalmazát a halmazok *közös részének* (vagy metszetének) nevezzük. A , B , C , ... L halmazok közös része azokból és csak azokból az elemekből áll, melyek az adott A , B , C , ... L halmazok mindegyikéhez hozzátartoznak.

Legyen például A és B két sík, amelyeket pontok halmazának tekintünk. Ha a síkok különbözőek és nem párhuzamosak, akkor közös részük egy egyenes; ha különbözőek, de párhuzamosak, akkor közös részük üres halmaz; ha a két sík egybeesik.

akkor „közös részük” bármelyik síkkal azonos. Ha A , B és C három sík, és nincs olyan egyenes, amelyik mindhárom síkkal párhuzamos lenne, akkor közös részük egyetlen elemből álló halmaz, egy pont.

A „mértani hely” kifejezés lényegében ugyanazt jelenti, mint a „halmaz” szó: a sík azon pontjainak „halmaza” (vagy mértani helye), melyek adott ponttól adott távolságra vannak, kör.

Ebben a példában a halmazt (mértani helyet) úgy definiáljuk, hogy meghatározzunk valamilyen *feltételt*, amelyet elemeinek (vagy pontjainak) ki kell elégíteniük, vagyis egy *sajátosságot*, amellyel elemeinek rendelkezniük kell: a kör pontjai kielégítik azt a feltételt, vagyis a kör pontjainak megvan az a sajátossága, hogy ugyanabban a síkban vannak, és mindegyik ugyanabban az adott távolságban van az adott ponttól.

A „feltétel” és „sajátosság” fogalma elválaszthatatlanul hozzátartozik a halmaz fogalmához. Sok matematikai feladatban világosan és egyszerűen megadhatjuk azt a feltételt vagy sajátosságot, amely valamely halmaz elemeit jellemzi. De ha nincs is többet mondó leírásunk, azt mindig mondhatjuk: az S halmazhoz tartozó elemeknek megvan az a sajátosságuk, hogy S -hez tartoznak, vagyis eleget tesznek annak a feltételnek, hogy S -hez tartoznak.

A három mértani hely megoldástípusának tárgyalása (a két mértani hely után, lásd az 1.47. példát) utat mutathat további, szélesebb körű általánosításra. A halmazok és közös részük tárgyalása is erre ösztönöz. De egyelőre hagyjuk, hadd érlelődjék az olvasóban ez a gondolat, majd később visszatérünk rá.

Azt a legkisebb halmazt, melynek az adott halmazok mindegyike részhalmaza, az adott halmazok *egyesítésének* (vagy *uniójának*) nevezzük. Más szóval az A , B , ... és L halmaz egyesítési halmaza (uniója) mindazokból az elemekből áll, amelyek A -hoz, amelyek B -hez, ..., amelyek L -hez tartoznak, és az egyesítési halmaz (unió) bármely eleme az A , B , ..., L halmazok közül legalább egyikhez (esetleg többhöz is) hozzátartozik.

„Közös rész” és „egyesítési halmaz” (unió) szorosan összetartozó fogalmak („komplementer fogalmak”, mégpedig olyan értelemben, amelyre most éppen csak utalunk); egyiket sem vizsgálhatjuk alaposan a másik nélkül. Egyébként tárgyalásaink során többször fog szerepelni a közös rész, mint az egyesítési halmaz (unió). Jó lesz, ha az olvasó más könyvből megismerkedik a halmazelmélet alapfogalmaival, mert ezek hamarosan a középiskolák tananyagába is bekerülnek.

2. FEJEZET

A DESCARTES-FÉLE MEGOLDÁSTÍPUS

2.1. Descartes és az egyetemes módszer eszméje

René Descartes (1596—1650) egyike volt a legnagyobbaknak. Sokan a modern filozófia megalapítójának tekintik. Munkája megváltoztatta a matematika arculatát, és a fizika történetében is jól megérdemelt helye van. Minket most főképp *Regulae ad directionem ingenii* („Szabályok a gondolkodás irányítására”) c. munkája érdekel (lásd 2.72.).

„Szabályai”-ban Descartes a problémamegoldás egyetemes módszerét akarta bemutatni. Eljárása nagy vonásokban:

Először, minden problémát vezessünk vissza matematikai problémára.

Másodszor, minden matematikai problémát vezessünk vissza algebraira.

Harmadszor, minden algebrai problémát vezessünk vissza egyetlen egyenlet megoldására.

Descartes úgy vélte, hogy így minden típusú probléma megoldható.

Minél többet tudunk, annál több hézagot látunk ebben az elgondolásban. Egy idő után Descartes-nak is be kellett látnia, hogy vannak olyan esetek, amelyekre eljárása nem alkalmazható. Mindenesetre befejezetlenül hagyta „Szabályai”-t, csak töredékeit hozta nyilvánosságra későbbi (és jobban ismert) művében, a *Discours de la Méthode*-ban („A módszer tárgyalása”).

Van valami mélységesen igaz abban az elgondolásban, amely a Descartes-féle terv alapja. De sokkal nehezebb a keresztülvitele, sokkal több benne az akadály, a bonyolult részlet, mint Descartes első lelkesedésében elképzelte. Descartes terve kudarcot vallott, de nagy volt — és e kudarcnak is nagyobb hatása volt a tudományra, mint számtalan apró-cseprő elgondolásnak, véletlen sikernek.

Ha Descartes elgondolása nem is válik be mindig, igen sokféle esetben, köztük kimeríthetetlenül sok *fontos* esetben is alkalmazható. Ha egy középiskolás diák „egyenletek felállításával” old meg egy „szöveges feladatot”, akkor Descartes eljárását követi, és ezzel mintegy felkészül az abban rejlő mély gondolat komolyabb alkalmazására is.

Így hát érdemes egy pillantást vetni különféle iskolai feladatokra.

2.2. Kicsi kis probléma

Ez a kis fejtörő ma is éppen úgy szórakoztatja az értelmes gyerekeket, mint talán már évszázadok óta.

Egy gazda házinyulákat meg tyúkokat tartott. Ezeknek az állatoknak volt összesen 50 feje és 140 lába. Hány tyúkjá és hány nyula volt a gazdának?

Többféleképp is elindulhatunk.

(1) *Próbálgatás.* Összesen 50 állatról van szó. Ezek nem lehetnek mind tyúkok, mert akkor csak 100 lábuk volna. Nyulak sem lehetnek mind, mert akkor 200 lábuk volna. Pedig épp 140 lábuk van. Ha az állatok fele tyúk lenne, fele nyúl, akkor ... Foglalkoztatja ezeket az eseteket:

Tyúk	Nyúl	Láb
db	db	db
50	0	100
0	50	200
25	25	150

Ha kevesebb tyúkot veszünk, akkor növelnünk kell a nyulak számát és így még több lesz a láb. Ha viszont több tyúkot veszünk ... Így 25-nél több tyúknak kell lennie — hadd próbáljunk 30-at:

Tyúk	Nyúl	Láb
db	db	db
30	20	140

Megvan! Ez a megoldás.

Valóban megkaptuk a megoldást, mert az adott 50 és 140 arányilag egyszerű számok. De ha ezt a problémát azonos szövegezéssel nagyobb vagy bonyolultabb számokkal vetnők fel, több próbálkozásra vagy nagyobb szerencsére lenne szükségünk ahhoz, hogy elvergődjünk a megoldásig.

(2) *Jó ötlet.* Természetesen megoldhatjuk kicsi kis problémánkat kevésbé „empirikusan” is, inkább „deduktívan”. Arra gondolok, hogy kevesebb találgatással, több okoskodással. Lássunk ilyen megoldást:

A gazda különleges pillanatban lepi meg állatait; a tyúkok féllábukon, a nyulak hátsó lábukon állanak. Ebben a figyelemre méltó helyzetben éppen lábaik felét használják, tehát 70-et. A 70-es számban a tyúkok fejenként egyszer, a nyulak fejenként kétszer jönnek számításba. Vonjuk le a 70-ből az összes fej 50-es számát, akkor a nyúlfejek száma marad meg, vagyis

$$70 - 50 = 20$$

a nyúl! És természetesen 30 a tyúk.

Ilyen megoldás akkor is sikerrel jár, ha kicsi kis problémánkban az előbbi számok (50 és 140) helyére kevésbé egyszerűeket teszünk. Ez a megoldás (kevésbé kedélyes formában) igen szellemes, a helyzet világos meglátása és egy szemernyi ötletesség kellett hozzá. Gratulálunk kell annak a 14 éves kamasznak, aki magától rájön! A jó ötletek nagyon ritkák — nagy szerencse, ha néha rábukkanunk egyre-egyre.

(3) *Algebrai megoldás.* Megoldhatjuk kicsi kis problémánkat kevesebb szerencsével és több rendszerességgel; akkor nem bízunk magunkat a véletlenre — persze ha tudunk egy kis algebrát is.

Az algebra olyan nyelv, amely nem szavakból, hanem jelekből áll. Ha jártasak vagyunk benne, akkor a mindennapi élet alkalmas mondatait az algebra nyelvére fordíthatjuk. Próbáljuk meg tehát lefordítani a mi kis problémánkat is. Ezzel a Descartes-féle elgondolás egyik szabályát követjük: „minden problémát vezessünk vissza algebrai problémára”. Esetünkben könnyű a fordítás:

A probléma

magyar nyelven

az algebra nyelvén

a gazdának volt

bizonyos számú tyúkjá

x

és bizonyos számú nyula,

y

az állatoknak ötven feje

$$x + y = 50$$

és száznegyven lába volt

$$2x + 4y = 140.$$

A felvetett kérdést két egyenletből álló, kétismeretlenes (x és y) egyenletrendszerre fordítottuk. Megoldásához igen kevés algebratudás szükséges; írjuk le újra a következő alakban az egyenletrendszert:

$$x + 2y = 70$$

$$x + y = 50.$$

Vonjuk ki a második egyenletet az elsőből:

$$y = 20.$$

Ezt felhasználva, az egyenletrendszer második egyenletéből:

$$x = 30.$$

Ez a megoldás akkor is jó, ha a megadott számok nagyok, akkor is, ha kicsik, jó számtalan más problémára is, nem kell hozzá ritka jó ötlet, csak némi könnyedség az algebrai nyelv használatában.

(4) *Általánosítás.* Ismételten utaltunk arra a lehetőségre, hogy a feladatban megadott számokat helyettesíthetjük más, például nagyobb számokkal. Ez az elgondolás igen tanulságos volt. Még sokkal tanulságosabb, ha a megadott számokat betűkkel helyettesítjük.

Helyettesítsünk problémánkba 50 helyébe f -et és 140 helyébe l -et. Vagyis legyen a gazda állatainak f feje és l lába. Ezzel a helyettesítéssel problémánk új képet mutat, nézzük csak meg algebrai nyelvre fordítva:

a gazdának volt	
bizonyos számú tyúkjá	x
és bizonyos számú nyula	y
Az állatoknak f feje	$x + y = f$
és l lába volt	$2x + 4y = l$

A kapott két egyenletből álló egyenletrendszert most a következő alakban írhatjuk fel:

$$x + 2y = \frac{l}{2}$$

$$x + y = f,$$

és ebből kivonással adódik

$$y = \frac{l}{2} - f.$$

Fordítsuk most hétköznapi nyelvre vissza a képletet: a nyulak számát megkapjuk, ha a lábak számának feléből levonjuk a fejek számát. Ezt a megoldást az előbb jó ötletünkkel egy csapásra megkaptuk (2).

Ezúttal nem volt szükség sem különleges szerencsére, sem kedélyes elképzelésekre; az eredményt jól kitaposott úton értük el. Az egyszerű kezdő lépés abból állott, hogy a számok helyébe betűket tettünk. Ez a lépés ugyan nagyon egyszerű, de nagyon fontos is: ezzel a lépéssel mi általánosítottunk¹.

(5) *Összehasonlítás.* Tanulságos lehet összehasonlítani egy és ugyanazon probléma különböző megoldásmódjait. Tekintsünk vissza az előző négyre; figyeljük meg, hogy mindegyikben, még az elsőben is, van tanulság és érdekesség.

Az első eljárást úgy hívják, hogy „*megoldás próbálgatással*”. Valóban próbálgatások sorozatából is állott. Mindegyik próbálgatás az előző hibáját igyekezett helyrehozni. Mindent összevetve, ahogy előrehaladtunk, a hiba csökkent, az egymást követő próbálgatások mind közelebb és közelebb jutottak a kívánt végeredményhez. Ha ebből a szempontból nézzük ezt az eljárást, találóbb, ha „próbálgatás” helyett azt mondjuk, hogy „fokozatos próbálgatás” vagy „fokozatos helyesbítés”, vagy „szukcesszív approximáció”. Az utolsó kifejezés több okból a legtalálóbb. A „szukcesszív approximáció módszere” elnevezést igen sokféle eljárásra alkalmazzák minden szinten. Szukcesszív approximáció

¹ Éasd G. I. Általánosítás 3., 70–71. old.; Feladatunk variálása 4., 110. old.; Nem tudnád ellenőrizni az eredményt? 2., 180. old.

az is, ha a szótárban egy szót keresve előre vagy hátra lapozunk, aszerint, hogy a keresett szó az ábécérendben előbb vagy hátrább áll. A matematikus a szukcesszív approximáció igen kifinomult módszerét igyekszik alkalmazni, mikor olyan nehéz problémát tárgyal, amelynek nagy a gyakorlati jelentősége, és amelyhez nem is foghatna másként. Ezt a kifejezést alkalmazhatjuk a tudomány egészére is; az egymást követő tudományos elméletek, melyek a jelenségeket egyre helyesebben törekszenek magyarázni, az igazság szukcesszív approximációjának tekinthetők.

Ezért a tanár ne vegye el tanítványai kedvét a próbálgatásos módszertől. Ellenkezőleg — segítse elő, hogy a szukcesszív approximációt, ezt az alapvető módszert, intelligensen használják. Viszont meggyőzően rá kell mutatnia arra is, hogy annyira egyszerű feladatok esetében, mint a nyulas és a tyúkos feladat, sőt sok más (ennél fontosabb) esetben is, az algebra gyorsabban és biztosabban vezet célhoz, mint a szukcesszív approximáció.

2.3. Állítsunk fel egyenleteket

Az előzőekben [2.2. (3) pont] felvetett problémánkat a szavak hétköznapi nyelvről az algebrai szimbólumok nyelvére fordítottuk. Példánkban a fordítás könnyű volt; vannak azonban olyan esetek, melyekben a probléma egyenletrendszerre fordítása több tapasztalatot vagy több találékonyságot, vagy több munkát kíván.²

Milyen természetű munka ez? Descartes-nak szándékában volt megfelelni erre a kérdésre a „Szabályok” második részében, de ezt befejezetlenül hagyta. Az ő megszövegezéséből kivonatolom, és mai nyelvre fordítom azokat a részeket, amelyek tanulmányainknak ezen a fokon a legmegfelelőbbek. Sokat el kell hagynom abból, amit Descartes mondott, néhány dolgot pedig részletesebben kifejtennem, amit ő nem egészen így mondott, de azt hiszem, mégsem hamisítom meg elgondolása értelmét.

Szeretném Descartes előadási módját követni; minden magyarázatot rövid útmutatással vezetek be (mely inkább összegezés), és azután ezt kiegészítő megjegyzésekkel bővitem.

(1) *Mindenekelőtt a jól megértett problémát vezessük vissza ismeretlen mennyiségek meghatározására. (XIII—XVI. szabály.)*

Olyan problémának szentelni időt, melyet nem értettünk meg jól, ostobaság lenne. Ezért az első és félreismerhetetlen feladatunk, hogy megértsük a probléma lényegét és jelentőségét.

² Lásd G. I. Egyenletek felállítása 83—86. old.

Ha a problémát a maga egészében megértettük, irányítsuk figyelmünket a fő részeire. Egészen világosan kell látnunk:

milyen típusú dolgot kell meghatároznunk (mi az ismeretlen, vagy mik az ismeretlenek);

mi van megadva, vagy mi ismert (az adatok);

hogyan, milyen kapcsolatban állanak az ismeretlenek és az adatok egymással (a feltétel).

[A 2.2. (4) pont problémájában az ismeretlenek x és y , az adatok f és l , a tyúkók és nyulak fejének és lábainak száma. A feltételt először szavakban, majd egyenletekben fejeztük ki.]

Descartes-ot követve maradjunk olyan problémáknál, melyekben mennyiségek az ismeretlenek (azaz számok, ha nem is szükségképp egész számok). Másfajta problémákat, elsősorban mértani vagy fizikai problémákat olykor visszavezethetünk ilyen tisztán mennyiségi típusúakra, amint ezt később példákkal is megmutatjuk (lásd a 2.5. és 2.6. pontokat).

(2) *Vizsgáljuk a problémát a legtermészetesebb módon, vegyük megoldottnak, és szemléltessük az ismeretlenek és az adatok közti összes kapcsolatokat, egyiket a másik után, a feltételnek megfelelően (XVII. szabály).*

Képzeld el, hogy az ismeretleneknek vannak olyan értékei, melyek teljesen kielégítik a feltételeket: lényegében ezt jelenti az, hogy „vegyük a problémát megoldottnak” (1.4.). Ennek megfelelően, az ismeretleneket és az adott mennyiségeket bizonyos szempontból egységesen tárgyaljuk; olyan kapcsolatokban szemléltetjük őket, amilyeneket a feltétel megkövetel. Ezeket a kapcsolatokat abban a szellemben tekintjük át, ahogyan egy ábrát szoktunk vizsgálni és áttekinteni, mikor valamilyen mértani szerkesztést megtervezünk (lásd az 1.7. pont végét). Az a cél, hogy a legközelebbi tennivalónkhoz ösztönzést találjunk.

(3) *Válasszuk külön a feltételnek olyan részét, amelynek alapján egy és ugyanazt a mennyiséget kétféleképpen tudjuk kifejezni, és így egyenletet nyerünk az ismeretlenek között. Továbbhaladva ezen az úton, végül a feltételt annyi részre osztjuk, és így annyi egyenletből álló egyenletrendszert nyerünk, ahány ismeretlen van (XIX. szabály).*

Az előbbieket szabadon idézik, mintegy körülírják azt, amit Descartes a XIX. szabályban mond. E szabály után Descartes kéziratában nagy hézag van: a következő magyarázatok elvesztek (vagy talán sohasem írta meg őket). Így magunknak kell megtennünk saját megjegyzéseinket.

A cél elég világos: n egyenletből álló, n ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerre kell jutnunk. Magától értetődik, hogy az egyenletek megoldása egyben a felvetett problémának is megoldása. Tehát az egyenletrendszer a

feltétellel egyenértékű. Ha az egész egyenletrendszer az egész feltételt fejezi ki, akkor minden egyes egyenlet a feltétel egy-egy részét jelenti. Ezért n egyenlet felállítása érdekében a feltételt n részre kell bontanunk. De hogyan?

Az előző, (1) és (2) alatti megfontolások (melyek csak nagyjából körvonalazták Descartes: „Szabályok” c. művének XIII—XVII. fejezeteit) adnak ugyan irányítást, de határozott utasításokat nem. Természetes, hogy meg kell értenünk a problémát, hogy nagyon-nagyon világosan kell látnunk az ismeretleneket, az adatokat, a feltételt. Előnyünkre válhat, ha a feltétel különböző részeit áttekinthetjük, ha az ismeretlenek és adatok közti kapcsolatokat egyiket a másik után, jó sorrendben szemléljük. Ez a tevékenységünk lehetőséget nyit ugyan, de bizonyosságot nem ad a kívánt egyenletrendszer felállítására.

Az az útmutatás, amelyet mérlegelünk (a XIX. szabály körülírása), még hozzáad ehhez egyet: azért, hogy egyenletet nyerjünk, fejezzük ki *ugyanazt a mennyiséget kétféleképpen*. [A 2.2. (3) pont feladatában egyik egyenlet a *lábak számát* fejezi ki két különböző módon.] Ha ezt a megjegyzést alaposan megértjük, sokszor segítségünkre lesz az ismeretlenek közti egyenlet felfedezésében — a már felállított egyenletek megmagyarázásában pedig mindig.

Röviden, sok jó tanácsot adhatunk egyenletek felállítására, de holtbiztos recept nincs. Ahol a tanács nem segít, ott segíthet a gyakorlat.

(4) *Vezessük vissza az egyenletrendszert egyetlen egyenletre* (XXI. szabály).

Descartes XXI. szabályának szövegét, melyet rövidítve idéztünk, nem követik magyarázatok (ez az utolsó mondat Descartes kéziratában). Mi itt nem fogjuk vizsgálni, hogy algebrai egyenletek rendszere milyen feltételek mellett vezethető vissza egyetlen egyenletre, sem azt, hogy ez a visszavezetés hogyan történik. Ezek tisztán elméleti jellegű, matematikai kérdések, sokkal bonyolultabbak annál, mint azt Descartes rövid útmutatása alapján feltételeznők. Ma már alaposan kivizsgálták őket, de mostani mondanivalónkat ez nem érinti. Azokban az egyszerű esetekben, amelyekben erre a visszavezetésre szükségünk lesz, nagyon kevés algebrai tudás is elég.

Viszont vannak más, még kivizsgálatlan kérdések, és mi most ezekkel foglalkozunk. Ez azonban néhány példa után hasznosabb lesz.

2.4. Iskolai példák

Matematikusnak triviális az iskolai „szöveges feladat”, de nem a diáknak! — sőt néha a tanárnak sem. Mégis azt gondolom, hogy a szokásos buktatók és nehézségek jó részét elkerülheti az a tanár, aki Descartes előbb ismerttetett tanácsát komolyan igyekszik iskolai igényekre alkalmazni és a gyakorlatba átvinni.

Mindenekelőtt, sose kezdjen a tanuló a feladat megoldásához, amíg azt meg nem értette. Bizonyos mértékig ellenőrizhetjük, hogy a tanuló valóban megértette-e a feladatot: saját szavaival el kell tudnia ismételni, kiemelni az ismeretleneket és az adatokat, megmagyarázni a feltételt. Ha mindezt értelmesen meg tudja tenni, akkor hozzáláthat a további munkához.

Egy egyenlet a feltétel egy részét fejezi ki. A tanulónak még kell mondania, hogy az az egyenlet, amelyhez eljutott, a feltétel mely részét fejezi ki — és melyiket nem.

Egy egyenlet ugyanazt a mennyiséget kétféleképpen fejezi ki. A tanulónak még kell mondania, hogy melyik mennyiség ez.

Természetes, hogy a tanulónak a szükséges előismerettel kell rendelkeznie. Enélkül nem értheti meg a feladatot. A legtöbb középiskolai szöveges feladat „arányossági probléma” (lásd a következő három feladatot). Mielőtt ilyen feladatok kidolgozására kerülne sor, legyen már fogalma a tanulónak az egy-egységre eső hányadról, arányosságról, egyenletes változásról.

(1) Az egyik csővön át 15, a másikon 20, a harmadikon 30 perc alatt tölthetünk meg egy tartályt. Mennyi idő alatt telik meg az üres tartály, ha mindhárom csövet egyszerre nyitjuk ki?

Tételezzük fel, hogy a tartály, ha megtelt, L liter vizet tartalmaz. Akkor az első csővön percenként

$$\frac{L}{15}$$

liter folyik át. Mivel

$$\text{folyadékmennyiség} = \text{áramlási sebesség} \times \text{idő},$$

t perc alatt az első csővön átfolyt vízmennyiség

$$\frac{L}{15} t.$$

Ha a három cső az üres tartályt t perc alatt tölti meg, a megtelt tartály vízmennyiségét kétféleképp fejezhetjük ki:

$$\frac{L}{15} t + \frac{L}{20} t + \frac{L}{30} t = L.$$

A bal oldal minden egyes cső hozamát külön-külön, a jobb oldal a három cső együttes hozamát mutatja.

L -lel való osztás után a keresett t időre a következő egyenlet adódik:

$$\frac{t}{15} + \frac{t}{20} + \frac{t}{30} = 1.$$

Az egyenlethez természetesen másképpen is eljuthatunk, magát a problémát is többféleképp általánosíthatjuk és változtathatjuk.

(2) *Tamás 3, Dénes 4, Imre 6 óra alatt végez el bizonyos munkát. Mennyi idő alatt végzik el együtt ezt a munkát* (persze, ha közben nem hátráltatják egymást)?

Tamás egy óra alatt az egész munka $\frac{1}{3}$ részét végzi el; azt is mondhatjuk, hogy munkájának részaránya óránként az egész munka harmada. Ezért t óra alatt a munka $\frac{t}{3}$ -át végzi el. Ha a három fiú együtt dolgozik, és t óra alatt fejezi be a munkát (és ha egymást nem hátráltatják — ez aztán az igazi „akkor és csak akkor” feltétel!), akkor a munka egész mennyiségét kétféleképpen fejezhetjük ki:

$$\frac{t}{3} + \frac{t}{4} + \frac{t}{6} = 1;$$

a jobb oldalon az „egész munkát” jelentő 1 áll.

Ez a feladat az előzővel (1) csaknem azonos, még számszerűen is, mivel

$$15 : 20 : 30 = 3 : 4 : 6.$$

Tanulságos lesz megfogalmazni mindkettőjük közös általánosítását (betűkkel kifejezve). Tanulságos az is, ha a megoldásokat összehasonlítjuk, és ha az L mennyiség bevezetésének előnyeit és hátrányait mérlegeljük az (1) feladatban.

(3) *Egy felderítő repülőgép szélcsendes időben óránként 220 mérföldet repül. Üzemanyaga 4 órás repüléshez elegendő. Milyen messze repülhet, hogy kockázat nélkül vissza is térhessen, ha óránként 20 mérföld sebességű ellenszélben indul?*

Vegyük úgy, hogy a szél sebessége és iránya változatlan az egész repülés alatt, hogy a repülőgép egyenes vonalon halad, a megforduláshoz szükséges idő elhanyagolható stb. Minden szöveges feladat ilyen egyszerűsítő feltételeket tartalmaz, és a megoldójától némi *interpretáló és absztraháló* előmunkát követel. Ez a szöveges feladatok lényeges közös vonása; s ez nem is olyan triviális dolog, erről a tanárnak beszélnie kell — legalább is olykor-olykor.

A feladat tanulságosabbá válik, ha a

	220	20	4
számokat	v	w	T

betűkkel helyettesítjük. Jelöljük ezek sorban a repülőgép sebességét szélcsendes időben, a szél sebességét, és az egész repülés időtartamát. Ezek a mennyiségek az *adatok*. Jelöljük x -szel a repülőgép egyik irányban megtett útját, t_1 -gyel az odarepülés, t_2 -vel a visszarepülés időtartamát; ezek az *ismeretlen mennyiségek*. Hasznos ezeket a mennyiségeket áttekinthetően elrendezni:

	Menet	Jövet
Megtett út	x	x
Időtartam	t_1	t_2
Sebesség	$v - w$	$v + w$

(Az utolsó sor kitöltéséhez némi kinematikai tudásra is szükségünk van.)
Tudnunk kell továbbá azt, hogy

$$\text{út} = \text{sebesség} \times \text{idő}.$$

Fejezzük ki a következő három mennyiség mindegyikét kétféleképpen (a megtett út menet is, jövet is x , ezért kétszer fordul elő):

$$x = (v - w)t_1$$

$$x = (v + w)t_2$$

$$t_1 + t_2 = T.$$

A három ismeretlen (x , t_1 , t_2) meghatározására három egyenletből álló egyenletrendszerünk van. A felvetett problémában csak x -et kerestük; t_1 és t_2 *segédismeretlenek* azért vezettük be, hogy a teljes feltételt áttekinthetően fejezzük ki. Kiküszöbölve t_1 -et és t_2 -t, azt kapjuk, hogy

$$\frac{x}{v - w} + \frac{x}{v + w} = T,$$

és így

$$x = \frac{(v^2 - w^2)T}{2v}.$$

Semmi nehézséget nem jelent v , w és T számértékekkel való helyettesítése. Érdekesebb az adatok változtatásával megvizsgálni és ellenőrizni eredményünket.

Ha $w = 0$, akkor $2x = vT$. Ez helyes, világos: az egész repülés szélsőszélben megy végbe.

Ha $w = v$, akkor $x = 0$. Ismét világos: v sebességű ellenszéllel szemben a repülőgép nem indulhat.

Ha w értéke a $w = 0$ -tól $w = v$ -ig nő, akkor az x út a képletnek megfelelően folytonosan csökken. És így, a képlet ismét megegyezik azzal, amit a helyzet áttekintésével algebra nélkül is előre láthattunk.

Ha általános adatok (betűk) helyett számadatokkal dolgozunk, akkor a képletnek ez a tanulságos vizsgálata és eredményünk értékes ellenőrzése elmarad. Vannak egyébként más érdekes ellenőrzési lehetőségek is.

(4) Egy kereskedőnek kétféle keksze van: egyik kilogrammonként 90 Ft-ba, a másik 60 Ft-ba kerül. Olyan 50 kg súlyú keveréket akar készíteni, amelyik kilogrammonként 72 Ft-ba kerül. Hány kilogrammot kell az egyes fajtákból vennie?

Ez tipikus, bár elég egyszerű „keverési feladat”. Mondjuk, hogy a kereskedő az első fajta kekszből x , a másodikból y kilogrammot használt; x és y ismeretlenek. Az adatokat és ismeretleneket célszerűen áttekinthetjük a következő elrendezésben:

	Egyik fajta	Másik fajta	Keverék
Ár/kg	90	60	72
Súly	x	y	50

Fejezzük ki kétféleképpen a *keverék összsúlyát*:

$$x + y = 50.$$

Azután fejezzük ki kétféleképpen a *keverék teljes árát*:

$$90x + 60y = 72 \cdot 50.$$

Két egyenletből álló egyenletrendszerünk van a két ismeretlen, x és y meghatározására. A megoldást az olvasóra bízuk, aki minden fennakadás nélkül megtalálja az

$$x = 20, \quad y = 30$$

értékeket.

Az olvasó a „számokról” „betűkre” térve olyan problémához jut, amelynek egészen más (és sokkal érdekesebb) interpretációja is van — mint később kiderül.

2.5. Mértani feladatok

Csak két példát vizsgálunk.

(1) *Szerkesztési feladat.* Egyes szerkesztési feladatokat vissza lehet vezetni algebrai feladatokra. Bár az ilyen visszavezetések általános elméletét³ nem tárgyalhatjuk, de itt egy példa rá:

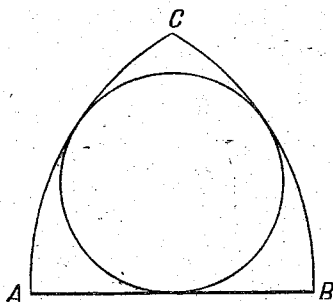
Az AB szakasz és két körív, AC és BC háromszögletű idomot zár be. Az egyik kör középpontja A , a másiké B , és mindkét kör átmegy a másik középpontján. Írjunk a háromszögletű idomba mind a három határvonalat érintő kört.

Ezt az alakzatot (2.1. ábra) néha gótikus ablakdiszítésben láthatjuk.

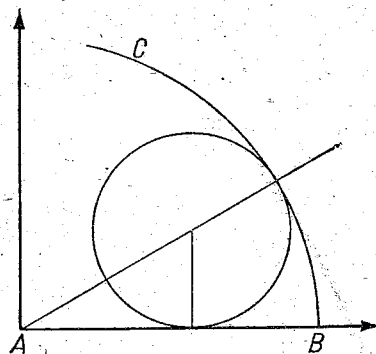
Világos, hogy a feladatot visszavezethetjük egy pontnak, a keresett kör középpontjának a megszerkesztésére. Egyik mértani hely nyilvánvaló: az AB szakasz felező merőlegese, az adott háromszögletű idom szimmetriatengelye. Még egy mértani helyet kell találnunk.

Vegyük a feltételnek csak az egyik részét és ejtsük el a másikat. Figyeljük azt a (változó nagyságú) kört, amelyik nem három, hanem csak két határ-

³ Lásd Courant—Robbins, 117—140. old.



2.1. ábra. Egy gótikus ablakról



2.2. ábra. Elhagytuk a feltétel egy részét

vonalat érint: az AB szakaszt és a BC körívet (2.2. ábra). Használjunk analitikus geometriát azért, hogy e kör középpontjának a mértani helyét megtaláljuk. Derékszögű koordináta-rendszerünk origója essen egybe az A ponttal, és az x tengely menjen át a B ponton (2.2. ábra). Jelöljük a változó kör középpontjának koordinátáit x -szel és y -nal. Kössük össze ezt a középpontot a két érintési ponttal, először az AB szakasz, másodszor a BC körív egy-egy pontjával (2.2. ábra). A kör két sugarának ugyanaz a hossza, ezért kétféleképpen fejezhetjük ki (legyen $AB = a$):

$$y = a - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Szabaduljunk meg a gyökjeltől, hozzuk az egyenletet

$$x^2 = a^2 - 2ay$$

alakra.

Így kiderül, hogy a változó kör középpontjának mértani helye parabola, tehát olyan mértani hely, amelyet szerkesztéseknél közvetlenül nem használhatunk.

Viszont a már kezdetben is említett, közvetlenül szembeötlő mértani helynek, az AB szakasz felező merőlegesének az egyenlete

$$x = \frac{a}{2}.$$

Ebből és a parabola egyenletéből megkaphatjuk a keresett kör középpontjának ordinátáját

$$y = \frac{3a}{8}.$$

Ezt az ordinátát az adott $AB = a$ hosszúságból könnyen megszerkeszthetjük.

(2) *Pythagoras tételének térmértani analogonja.* Az analógiák ritkán egyértelműek. A térmértannak több olyan tétele van, amelyet bátran lehet a Pythagoras-tétel analogonjának nevezni. Ilyen tételhez vezet, ha a kockát a négyzet, az olyan tetraédert pedig, amelyet úgy nyerünk, hogy a kocka egy csúcsát ferde síkkal levágjuk, a derékszögű háromszög analogonjának tekintjük. (A derékszögű háromszöget úgy kaphatjuk, hogy a négyzet egyik csúcsát vágjuk le ferde egyenessel.) A háromszög derékszögű csúcsának megfelel a tetraéder egyik csúcsa; úgy mondjuk, hogy ennél a csúcsnál a tetraédernek *derékszögű testszögle* van. A tetraéder e csúcsából kiinduló élek merőlegesek is egymásra, s így három derékszöget alkotnak.

Pythagoras tétele a következő problémát oldja meg: egy háromszögnek az O csúcsnál derékszöge van. Adott az O -ban találkozó a és b oldalak hossza. Számítsuk ki az O -val szemközti c oldal hosszát.

Vegyük az analóg problémát: *Egy tetraédernek az O csúcsnál derékszögű testszögle van. Adott az O -ban találkozó lapok A , B és C területe. Számítsuk ki az O -val szemközti lap D területét.*

Fejezzük ki D -t A , B és C -vel. Természetes, hogy a síkmértan megfelelő problémáját megoldó Pythagoras-tételhez,

$$c^2 = a^2 + b^2$$

analog képletet várunk. Egy diák azt találta ki, hogy

$$D^3 = A^3 + B^3 + C^3$$

lesz a képlet. Érdekes gondolat volt. A kitevő változása pontosan megfelel annak, hogy 2 dimenzióról 3 dimenzióra térünk át.

(3) *Mi az ismeretlen?* — Egy háromszög területe, D .

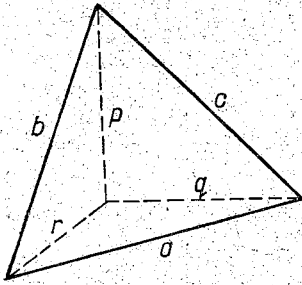
Hogyan határozhatunk meg ilyen ismeretlent? *Hogyan juthatunk ilyen típusú mennyiséghez?* A háromszög területét kiszámíthatjuk Heron képletével, ha ismerjük a három oldalát. Háromszögünk területe D . Jelöljük a , b és c -vel az oldalak hosszát, és legyen $s = \frac{a + b + c}{2}$; akkor

$$D^2 = s(s - a)(s - b)(s - c).$$

(Ez Heron képletének egyik alakja.) Rajzoljuk be D oldalait az ábrába (2.3. ábra).

Remek! De ismerjük-e az a , b és c oldalt? Bár nem ismerjük, de ki tudjuk fejezni három derékszögű háromszög befogóival (a 2.3. ábrán p , q , r -rel):

$$a^2 = q^2 + r^2, \quad b^2 = r^2 + p^2, \quad c^2 = p^2 + q^2.$$



2.3. ábra. Pythagoras a térben

Jól van; csak hogy p , q és r maguk ismertek-e? — Nem, de kapcsolatban vannak az adatokkal, az A , B és C területekkel:

$$\frac{1}{2}qr = A, \quad \frac{1}{2}rp = B, \quad \frac{1}{2}pq = C.$$

Ez is helyes, de vajon használható, amit így elértünk? — Azt hiszem, igen. Van most 7 ismeretlenünk:

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ a, & b, & c \\ p, & q, & r \end{array}$$

de van a meghatározásukra 7 egyenletünk is.

(4) Nincs semmi hiba az előbbi, (3) alatti okoskodásunkban. Descartes szabálya vezetett sikerre [2.3. (3)-ban szabad fordítását adtuk]. Annyi egyenletből álló egyenletrendszer nyertünk, ahány ismeretlenünk van. Csak az a baj, hogy a 7-es szám elég nagy, nem lenne könnyű megoldani 7 egyenletet 7 ismeretlennel. És Heron képlete sem biztató.

Ha már így gondoljuk, akkor jobb lesz újból nekivágni.

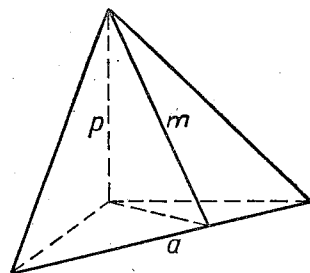
Mi az ismeretlen? Egy háromszög területe, D .

Hogyan határozzunk meg ilyen típusú mennyiséget? A háromszög területének legismertebb kiszámítási képlete:

$$D = \frac{a \cdot m}{2},$$

ahol a D területű háromszög alapja a , és magassága m ; rajzoljuk be m -et az ábrába (2.4. ábra).

Igen, a -t már láttuk, de mit tudunk m -ről? — Reméljük, hogy a D területű háromszög m magasságát alkalmas háromszögből kiszámíthatjuk. Messük a tetraédert m -en és az O csúcson (a derékszögű testszöglet csúcsán) átfektetett síkkal. A metszet derékszögű háromszög, az átfogója m , egyik befogója p



2.4. ábra. Újabb kiindulás

— az, amellyel már találkoztunk —, a másik, mondjuk k , az A területű háromszög a oldalára merőleges magasság. Ezért

$$m^2 = k^2 + p^2.$$

Nagyon jó! De mit tudunk k -ről? — Valahogy majd csak boldogulunk vele. Csakugyan: fejezzük ki kétféleképpen annak a háromszögnek a területét, melyről épp most említettük, hogy k a magassága:

$$\frac{1}{2}ak = A.$$

Van annyi egyenletünk, mint ahány ismeretlenünk? Vannak egyenleteink még régebből is, de ne vesztegessünk időt a számolgatásra! Már kezd derengeni a követendő út. Állítsuk csak össze az előző egyenleteket:

$$\begin{aligned} 4D^2 &= a^2m^2 \\ &= a^2(k^2 + p^2) \\ &= 4A^2 + a^2p^2 \\ &= 4A^2 + (r^2 + q^2)p^2 \\ &= 4A^2 + (rp)^2 + (pq)^2 \\ &= 4A^2 + 4B^2 + 4C^2. \end{aligned}$$

Hozzuk össze az elejét és a végét; szabaduljunk a felesleges 4-es tényezőtől; így

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Ez az eredmény Pythagoras tételének szoros analogonja. Az a bizonyos elgondolás a 3 kitevővel okos volt, de kiderült, hogy helytelen — és ez nem is olyan meglepő. A meglepő az, hogy az ötlet ilyen közel járt az igazsághoz.

Érdekes lehet összehasonlítani a kétféle kiindulást. Több szempontból is különböznek.

Elképzelhetjük-e Pythagoras tételének más analogonját is?

2.6. Egy fizikai feladat

Induljunk ki a következő kérdésből.

Egy vasgömb higanyban úszik. Vízet öntünk a higany fölé úgy, hogy a gömböt ellepje. Süllyed-e, emelkedik-e, vagy ugyanazon mélységben marad-e a gömb?

Két helyzetet kell összehasonlítani. Mindkét esetben a vasgömb alsó része a higanyba merül (a higany szintje alatt van). A gömb felső része az első helyzetben levegőben (vagy vákuumban), a másodikban vízben van. Melyik helyzetben lesz nagyobb az egész térfogatnak a felső része (az a része, amelyik a higany szintje felett van)?

Ez így tisztán kvalitatív kérdés. De kvantitatívra tehetjük, s akkor pontosabbá és egyben algebrai úton megközelíthetővé válik: *Számítsuk ki mindkét helyzetben a gömb higanyszint feletti részének a térfogatát.*

(1) A kvalitatív kérdésre tisztán intuitív okoskodással kézenfekvő választ adhatunk. Szemléltessük az egyik helyzetből a másikba való *folytonos átmenetet*. Képzeljük el, hogy a higanyra öntött és a gömb felső részét körülvevő *folyadék sűrűsége folytonosan változik*. Kezdetben ennek a képzelt folyadéknak a sűrűsége 0 (éppen vákuum van). A sűrűség nő, csakhamar a levegő, majd a víz sűrűségét éri el. Ha nem látjuk, hogy ez a változás milyen hatással van az úszó gömbre, akkor *növeljük tovább a sűrűséget*. Ha a képzelt folyadék sűrűsége eléri a vas sűrűségét, akkor a gömbnek teljesen ki kell emelkednie a higanyból. Ha a sűrűség még oly kis mértékben is nő, a gömb előtűnik, és kiemelkedik a képzelt folyadékból.

Természetes dolog feltételezni azt, hogy az úszó gömb helyzete egész idő alatt *ugyanabban az irányban* változik, miközben az elképzelt, borító folyadék sűrűsége nő. Arra a következtetésre jutottunk, hogy a vákuumtól a vízig való átmenet alatt a gömb *emelkedik*.

(2) A kvantitatív kérdés megválaszolásához szükséges három fajszűly számértéke:

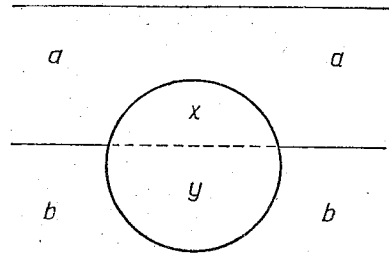
1,00	13,60	7,84
víz	higany	vas

Tanulságosabb a számok helyett betűket tenni. Jelölje

a	b	c
a felső folyadék	alsó folyadék	úszó test

fajszűlyát. Jelöljük v -vel az (adott) test egész térfogatát, x -szel a két folyadék közös szintje feletti, y -nal a szint alatti részt (2.5. ábra). Adataink a , b , c és v , ismeretlenjeink x és y . Természetesen

$$a < c < b.$$



2.5. ábra. Úszás kétféle folyadékban

Fejezzük ki az úszó test térfogatát kétféleképp:

$$x + y = v.$$

Ezen a ponton túl nem juthatunk, míg a tárgyhoz tartozó fizikai tényeket nem tudjuk. A *szükséges előismeret*: *Archimedes törvénye*. Szokásos megfogalmazása: az úszó testet felhajtó függőleges erő nagysága a kiszorított folyadék súlyával egyenlő. A szóban forgó gömb két rétegben szorít ki folyadékot. A kiszorított mennyiség súlya

$$\begin{array}{cc} ax & by \\ \text{a felső folyadékban} & \text{az alsó folyadékban.} \end{array}$$

A két felfelé ható függőleges erő együttesen tart egyensúlyt az úszó gömb súlyával. Ezt az utóbbit ismerjük; fejezzük ki kétféleképpen:

$$ax + by = cv.$$

A két ismeretlen, x és y számára két egyenletből álló egyenletrendszerre jutottunk. Az egyenletrendszert megoldva

$$x = \frac{b - c}{b - a} \cdot v, \quad y = \frac{c - a}{b - a} \cdot v.$$

(3) Térjünk vissza a probléma eredeti alakjához. Az első helyzetben vákuum volt a higany felett:

$$a = 0, \quad b = 13,60, \quad c = 7,84,$$

tehát a vaskömb higanyszint feletti részének térfogata

$$x = 0,423v.$$

A második helyzetben víz volt a higany felett:

$$a = 1,00, \quad b = 13,60, \quad c = 7,84,$$

tehát

$$x = 0,457v.$$

Az utóbbi rész nagyobb. Ez teljes mértékben igazolja intuitív következtetésünk helyességét.

Az általános képlet (betűkkel) érdekesebb, mint a belőle levezethető számszerű eredmények. Amellett teljes képet ad az intuitív úton kapott következtetésünkről. Vegyük b, c, v -t állandónak, és a -t (a felső réteg sűrűségét) növeljük

$$a = 0\text{-től} \quad a = c\text{-ig.}$$

Eközben x nevezője, $b - a$, folytonosan csökken, tehát x (v higanyszint feletti része) folytonosan nő

$$x = \frac{b - c}{b} \cdot v \text{ től} \quad x = v \text{ ig.}$$

2.7. Egy fejtörő

Hogyan lehet öt négyzetből kettő? A 2.6. ábrán kereszt alakú papírlapot látunk; öt egybevágó négyzetből készült. Egyenes vonal mentén vágjuk a lapot kétfelé; majd valamelyik darabot másik egyenes mentén újból ketté. Az így keletkezett három darab megfelelően összerakva, két, oldalaikkal egymás mellé illesztett egybevágó négyzet alakját mutatja.

A 2.6. ábra keresztje erősen szimmetrikus (van egy szimmetriacentruma és négy szimmetriatengelye). A két egymáshoz csatlakozó négyzet együtt olyan téglalapot alkot, melynek hossza szélességének kétszerese. Természetesen az a három darab, melyre a keresztet szétvágjuk, ezt a téglalapot átfedés nélkül tölti ki.

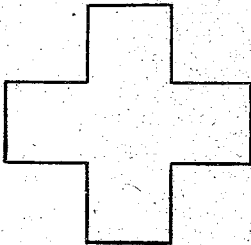
Meg tudjuk-e oldani a probléma egy részét? Világos, hogy a kívánt téglalap területe egyenlő az adott kereszt területével, $5a^2$ -tel, ha a -val jelöljük a keresztet alkotó öt négyzet egy-egy oldalát. Ismerve téglalapunk területét, meghatározhatjuk az oldalait. Jelöljük hosszát x -szel, akkor szélessége $\frac{x}{2}$. Fejezzük ki a területét kétféleképp:

$$x \cdot \frac{x}{2} = 5a^2,$$

vagy

$$x^2 = 10a^2.$$

Ebből a téglalap mindkét oldalát meghatározhatjuk.



2.6. ábra. Ötből kettő?

A téglalapról eleget tudunk, ismerjük alakját és nagyságát, de a fejtörőt még nem oldottuk meg: ki kell jelölnünk a két vágás helyét a kereszten. Az x -re nyert fenti kifejezés útmutatást adhat erre, különösen, ha a következő alakban írjuk:

$$x^2 = 9a^2 + a^2.$$

Ezzel az útmutatással az olvasóra bízunk a megoldást.

Az előző fejtörő tárgyalásából néhány hasznos útbaigazítást meríthetünk.

Először is látjuk, hogy az algebra akkor is hasznos lehet, ha a problémát nem oldja meg teljesen: megoldhatja a probléma valamelyik részét, és ez a részmegoldás megkönnyítheti a hátralevő munkát.

Másodszor, az alkalmazott eljárásban feltűnő a fokozatosság. Eleinte a megoldásnak csak kis részét értük el: a kívánt téglalap területét. Ennek a kis eredménynek a felhasználásával jutottunk el aztán a nagyobbra: a téglalap oldalaira, vagyis olyan adatokra, amelyek a téglalapot már meghatározzák. Most majd a nagyobb rész felhasználásával próbálunk még nagyobbra jutni, s ezután reméljük, a teljes megoldásra.

2.8. Kis paradoxonok

Azok a problémák, melyekkel ebben a fejezetben eddig olyan részletesen foglalkoztunk, „értelmes” problémák. Hajlunk arra, hogy valamilyen problémát akkor tekintsünk „értelmesnek”, ha egyetlen megoldása van. Ha egy problémával komolyan foglalkozunk, akkor minél előbb szeretnénk tudni (vagy kitalálni), vajon értelmes-e vagy sem? És így már az indulásnál kérdezzetjük: *Kielégíthetjük-e a feltételt? Elegendő-e a feltétel az ismeretlen meghatározására? Nem elegendő? Vagy talán feleslegesen is tartalmaz (redundáns)? Esetleg ellentmondó?*

Ezek fontos kérdések⁴. Később általánosan is megbeszéljük, hogy mi a szerepük. Most lássunk csak néhány példát.

(1) *Valaki öt órán át gyalogolt. Először sík úton, majd hegynek fel, azután megfordult, és ugyanazon az úton tért vissza kiindulási pontjához. Sík talajon 4, hegynek fel 3, völgynek le 6 mérföldet tett meg óránként. Mekkora utat járt be?*⁵
„Értelmes” ez a probléma? *Elegendőek-e az ismeretlen meghatározására az adatok? Nem elegendők? Vannak feleslegesek is?*

Úgy látszik, hogy *nem elég* az adat: hiányzik valami tájékoztatás az út lejtős részének hosszáról. Ha tudnánk, hogy ez az ember mennyi ideig gyalogolt hegynek fel vagy völgynek le, akkor nem lenne nehézségünk. De ilyen tájékoztatás nélkül a feladat határozatlannak tűnik.

⁴ Lásd G. I. 155. old. Kielégíthető-e a kikötés?

⁵ Lásd Lewis Carroll: „Bonyolult mese”. Első Csomó.

Mégis vágjunk neki. Jelölje

x az egész megtett utat,

y az út hegynek felfelé megtett szakaszát.

A gyaloglásnak négy különböző szakasza volt:

sík, hegynek fel, völgynek le, sík.

Könnyen kifejezhetjük az egész gyaloglásra szánt időt kétféleképp:

$$\frac{\frac{x}{2} - y}{4} + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} + \frac{\frac{x}{2} - y}{4} = 5.$$

Egy egyenletünk van két ismeretlenre — keveselljük. Ám, ha a tagokat összevonjuk, kiderül, hogy y együtthatója 0, és így

$$\frac{x}{4} = 5,$$

$$x = 20.$$

Mégis elég adatunk volt x meghatározására: tévedtünk, a probléma nem volt határozatlan.

(2) Tévedtünk, ez tagadhatatlan; de azzal gyanúsítjuk a szerzőt, hogy előre megfontolt szándékkal, a 3, 6 és 4 számok furfangos megválasztásával vezetett félre bennünket. Hogy furfangja nyitjára rájöjjünk, a számok helyett tegyünk betűket:

	hegynek fel	völgynek le	síkon
	3	6	4
helyett	u	v	w

betűk jelöljék a gyaloglás sebességét (mérőföld/órában). Olvassuk el újra a problémát az eredeti számok helyett bevezetett betűkkel, és fejezzük ki kétféleképpen a teljes időtartamot:

$$\frac{\frac{x}{2} - y}{w} + \frac{y}{u} + \frac{y}{v} + \frac{\frac{x}{2} - y}{w} = 5,$$

rendezve

$$\frac{x}{w} + \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} - \frac{2}{w} \right) y = 5.$$

Ebből az egyenletből x -et nem határozhatjuk meg mindaddig, amíg y együtthatója el nem tűnik. És így a probléma *határozatlan*, kivéve, ha

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right).$$

Ha a gyaloglás három szakaszának a sebességét éppen csak találomra választjuk, akkor ez a reláció (összefüggés) általában nem teljesül, és így a probléma határozatlan. Tévétra vitt bennünket ez a csalafinta fogás!

(A kritikus relációt

$$w = \frac{2uv}{u + v}$$

alakban is kifejezhetjük, azt mondhatjuk, hogy a sík szakaszra vonatkozó sebesség a másik kettőnek harmonikus középértéke.)

(3) Legyen két kisebb kör egymáson kívül, de mindkettő egy nagyobb, harmadik kör belsejében. Mindegyik kör érinti a másik kettőt, és középpontjaik egy egyenesen vannak. Adott r , a nagyobb kör sugara és t , a kisebb körök közös pontjában állított érintőnek a nagyobb körbe eső szakasza. Mekkora az a terület, amely a nagyobb körön belül, de a kisebb körökön kívül van (2.7. ábra)?

Értelmes probléma ez? Elég adatunk van az ismeretlen meghatározására? Nem elég? Van-e felesleges adat?

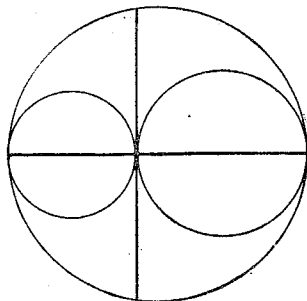
A probléma teljesen értelmesnek látszik. A három körből álló alakzat meghatározására szükséges és elégséges a két kisebb kör sugarának az ismerete, de bármely másik, két független adat is jó erre. Az adott r és t nyilvánvalóan függetlenek: változtathatjuk az egyiket a másik nélkül (csak éppen teljesülnie kell a $t \leq 2r$ egyenlőtlenségnek). Semmi jele sincs annak, hogy ez a két adat, r és t akár kevés, akár sok lenne, éppen elegendőnek látszanak.

Dologra hát! Jelöljük A -val a keresett területet, x -szel és y -nal a két kisebb kör sugarát. Világos, hogy

$$A = \pi r^2 - \pi x^2 - \pi y^2,$$

$$2r = 2x + 2y.$$

Eddig két egyenletünk van A , x és y ismeretlenek meghatározására. A harmadik egyenlet elnyerésére figyeljük azt a nagyobb körbe írható derékszögű háromszöget, melynek átfogója átmegy a három kör középpontján, ezzel szemközti



2.7. ábra. Két adat

csúcsa pedig a t szakasz egyik végpontja. E háromszög derékszögű csúcsából húzható magasság hossza $\frac{t}{2}$; ez mértani középárányos az átfogó két szelete közt (Euklidész VI. 13.):

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2 = 2x \cdot 2y.$$

Most már három egyenletünk van. Az utóbbi kettőt írjuk kissé másképp:

$$(x + y)^2 = r^2,$$

$$2xy = \frac{t^2}{8}.$$

Kivonással és $x^2 + y^2$ -nek az első egyenletbe helyettesítésével

$$A = \frac{\pi t^2}{8}.$$

Kiderült, hogy az adatok egy része *felesleges*; t és r közül csak az elsőre volt igazán szükségünk, a másodikra nem. Már megint tévedtünk.

A most tárgyalt példa mögött rejlő érdekes kapcsolatot Archimedes vette észre. (Lásd *Összes Művei*-t Heath angol fordításában a 304–305. oldalon.)

Példák és megjegyzések a 2. fejezethez

Első rész

2.1. Bélának 3 Ft 50 fillérje van 5 filléreseken és 10 filléreseken. Összesen 50 pénzdarabja. Hány 5 és hány 10 fillérese van? (Találkoztunk-e már ugyanezzel a feladattal, csak egy kicsit más formában?)

2.2. Általánosítsuk a 2.4. (1) feladatot. Térjünk át számokról betűkre, vegyünk figyelembe különböző töltő- és ürítő csöveket.

2.3. Keressünk a 2.4. (2)-ben felállított egyenletekre néhány más értelmezést is.

2.4. Ellenőrizzük másként is a 2.4. (3) pont repülésfeladatának az eredményét.

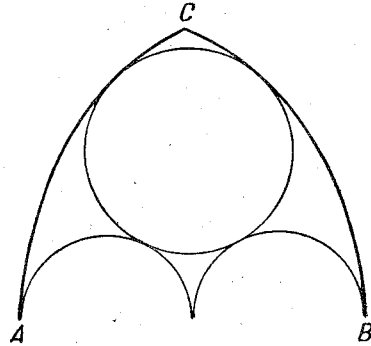
2.5. Helyettesítsük a 2.4. (4) „keverési feladatban”

	a	b	c	v
betűkkel a	90	60	72	50

számadatokat. Olvassuk el újra a feladatot a helyettesítés után, és állítsuk fel az egyenleteket. Felismerjük őket?

2.6. A 2.8. ábra (amely a 2.1. ábrától különbözik ugyan, de mégis rokon vele) gótikus ablakdíszítésben gyakran előfordul.

Határozzuk meg annak a körnek a középpontját, amely a görbe vonalú négyszöget alkotó négy körívet (mind a négyet!) érinti.



2.8. ábra. Egy gótikus ablakról

Két körív sugara AB , az egyik középpontja A , a másiké B . A két félkör sugara $AB/4$, mindkettő középpontja az AB szakaszon fekszik; az egyik félkör az A , a másik a B pontból indul, közös végpontjuk az AB szakasz felezőpontja, melyben érintkeznek.

2.7. Vigyük keresztül a 2.5. (3) pontban ajánlott tervet; a D^2 -nek A , B és C -vel való ugyanolyan egyszerű kifejezéséhez vezet, mint amilyenre — más eszközökkel — a 2.5. (4) pontban jutottunk.

2.8. Hasonlítsuk össze a 2.5. (3) és 2.5. (4) kiindulást. (Emeljük ki az általános szempontokat.)

2.9. Határozzuk meg azon tetraéder V térfogatát, amelynek O csúcsánál derékszögű testszöglete van. Adott az O -ban találkozó három oldallap, A , B és C területe.

2.10. *Analagon Heron tételéhez.* Egy tetraéder egyik csúcsa derékszögű testszöglet. Adott ezzel a csúccsal szemközti élek hossza (a , b és c). Határozzuk meg a tetraéder V térfogatát.

(Ha V kifejezésébe alkalmas — szimmetrikus — módon bevezetjük az

$$S^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

mennyiséget, az eredmény alakja valamennyire hasonló Heron képletéhez.)

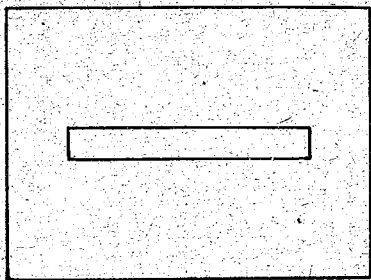
2.11. *Még egy analagon Pythagoras tételéhez.* Határozzuk meg egy téglatest (derékszögű paralelepipedon) testátlójának a hosszát, ha adott a hossza, szélessége, magassága (p , q , r).

2.12. *Újabb analagon Pythagoras tételéhez.* Határozzuk meg egy téglatest testátlóját, ha adott három, közös csúcsú oldallap átlójának hossza (a , b , c).

2.13. *Még egy analagon Heron tételéhez.* Jelöljük V -vel egy tetraéder térfogatát, a , b és c -vel egyik lapjának három élhosszát. A tetraéder szemközti élei legyenek egyenlő hosszúak. Fejezzük ki V -t a , b és c -vel.

2.14. Ellenőrizzük a 2.10. és 2.13. feladat eredményét. Vizsgáljuk meg azt az elfajult esetet, melyben V eltűnik ($V = 0$).

2.15. Oldjuk meg a 2.7. pontban szereplő fejtörőt. (A szétvágáskor x és $x/2$ hosszúságú oldalnak kell keletkezniük — hogyan illeszthetünk be a keresztbe egy x hosszúságú szakaszt?)



2.9. ábra. Készítsünk két vágással egy négyzetet

2.16. A 2.9. ábra különös alakú papírlapot mutat: egy téglalapot téglalap alakú nyílással. A külső téglalap oldalai 9 és 12, a belső téglalapéi 1 és 8 hosszúságegységyiek. A két téglalapnak ugyanaz a középpontja, és megfelelő oldalai párhuzamosak. Vágjuk a lapot két vonal mentén két részre, és illesszük a két részt össze úgy, hogy négyzet keletkezzék. (Hézag nélküli négyzet.)

a) *Meg tudjuk-e oldani a problémát egy részét? Milyen hosszú a kívánt négyzet oldala?*

b) *Vegyük megoldottnak a problémát. Képzeljük, hogy a lap máris két darabra van vágva, „bal oldali darabra” és „jobb oldali darabra”. Hagyjuk a bal oldali darabot ott, ahol van, és a jobb oldalt csúsztassuk a kívánt helyzetbe (melyben a másikkal együtt négyzetet alkot). Ha már ismerjük a választ (a)-ra, akkor milyen típusú mozgást várunk?*

c) *Találjuk ki a megoldás egy részét. Az adott lap szimmetrikus a középpontjára is, és két egymásra merőleges tengelyére is. Milyen szimmetriát kell valószínűleg megtartanunk, amikor szétvágjuk a lapot a két, keresett vonal mentén?*

Második rész

A következő példák közül egyesek meghatározott téma körül csoportosulnak; erre minden csoportban az első példa címe utal (*Vegyes, Síkmértan, Térmértan* stb.). Néhány példa után Newton vagy Euler neve áll, ezeknek a forrásmunkái:

Universal Arithmetica: or, a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. Latinul írta *Sir Isaac Newton*, angolra fordította *Mr. Ralphson*. London, 1769. („Newton után”-nal jelölt példák ugyanebből a forrásból származnak, de a megfogalmazásban vagy a számadatokban van némi változás.)

Leonhard Euler: Vollständige Anleitung zur Algebra, St. Petersburg, 1771.

Isaac Newton (1643—1727) sokan a legnagyobb tudósnek tekintik, aki csak valaha is élt. Munkássága felöleli a mechanika alapjait, az egyetemes gravitáció elméletét, a differenciál- és integrálszámítás felfedezését, az elméleti és kísérleti fénytant és több kisebb jelentőségű tárgykört is. Még e kisebb alkotásainak bármelyike is helyet biztosítana neki a tudomány történetében. Leonhard Euler (1707—1783) is egyike a legnagyobbaknak; keze nyoma megtalálható a matematika és a fizika majdnem minden ágán. Senki nem tett nála többet a Newton- és Leibniz-féle kalkulus fejlesztéséért. És ezek a nagy emberek nem tartották méltóságukon alulinak azt, hogy részletesen megmagyarázzák, és kifejtsek, hogyan kell az egyenleteket szöveges feladatok megfejtésére alkalmazni.

2.17. *Vegyés.* Egy öszvér és egy számár több mázsás terhet cipelt. A számár sokallta a magát, és így szólt az öszvérhez: „Ha átvinnék a terhedből egy mázsát, az enyém kétszer olyan nehéz lenne, mint a tiéd.” Az öszvér így felelt: „Az ám, de ha te adnál át nekem egy mázsát, a tiedből, akkor én már háromszor annyi súlyt cipelnék, mint te.”

Hány mázsát cipelt az egyik, hányat a másik (Euler)?

2.18. Amikor Mr. és Mrs. Smith repülőre szálltak, csomagjaik összsúlya 94 font volt. A férj 1,50 \$-t, a feleség 2 \$-t fizetett a túlsúlyért. Ha Mr. Smith egyedül repült volna kettőjük csomagjával, akkor 13,50 \$-t kellett volna fizetnie. Hány font súlyú csomagot vihet egy személy magával ráfizetés nélkül?

2.19. Egy apa 1600 koronát hagyott három fiára. A végrendeletben meghagyta, hogy a legidősebb fiú jussa 200 koronával több legyen a középsőnél, a középső pedig 100 koronával több, mint a legkisebbé. Számítsuk ki mindegyikük részét. (Euler.)

2.20. Egy apa vagyona négy fiára maradt. Fiai a következőképp osztották el egymás közt a vagyont:

Az első legyen 3000 livres-rel kevesebb, mint a vagyon fele.

A másodiké 1000 livres-rel kevesebb, mint a vagyon harmada.

A harmadiké legyen épp a vagyon negyede.

A negyedik 600 livres-rel többet kapjon, mint az ötödrész.

Mekkora volt az egész vagyon, és mennyi jutott egy-egy fiúra? (Euler.)

2.21. Egy apa számos gyermeket hagyott hátra, és így végrendelezett a vagyonáról:

Az első legyen 100 korona és a maradék tizede,

a másodiké 200 korona és a maradék tizede,

a harmadiké 300 korona és a maradék tizede,

a negyediké 400 korona és a maradék tizede

és így tovább. A végén kiderült, hogy mindegyik gyermekének ugyanannyi jutott. Mekkora volt a vagyon, hány gyermeke volt, és mindegyiknek mennyi jutott? (Euler.)

2.22. Hárman játszottak; az első játszmában az első játékos annyit veszített, hogy a másik kettő megkétszerezte a pénzét. A következőben a második veszített úgy, hogy az első és harmadik játékos kétszerezte meg a pénzét. Végül a harmadik játszmában az első és második annyit nyert a harmadiktól, hogy mindkettő megkétszerezte a pénzét. Ekkor abbahagyták a játékot, és kiderült, hogy végeredményben mindegyiküknek ugyanannyija van, mégpedig 24 louis. Kérdés, milyen összeggel kezdett mindegyik a játékhoz. (Euler.)

2.23. Ugyanazt a munkát három munkás megadott idő alatt végezné el; és pedig, ha *A* egyedül dolgozik, akkor 3 hét alatt egyszer, *B* 8 hét alatt háromszor és *C* 12 hét alatt ötször. Számítsuk ki, hogy mennyi idő alatt végzik el közösen a munkát. (Newton.)

2.24. Különböző hatóerők adottak. Határozzuk meg azt az időtartamot, mely alatt együttesen hozzák létre a megadott hatást. (Newton.)

2.25. Valaki vásárolt 40 véka búzát, 24 véka árpát, és 20 véka zabot, összesen 15 font és 12 shillingért.*

Később ismét vásárolt ugyanazokból a gabonafélékből, mégpedig 26 véka búzát, 30 véka árpát és 50 véka zabot, összesen 15 fontért.

* 1 angol font = 20 shilling (*ford.*)

Végül harmadszor is vásárolt ezekből a gabonafajtákból 24 véka búzát, 120 véka árpat és 100 véka zabot, összesen 34 fontért.

Kérdés, mennyibe került az egyes gabonafajták egy-egy vékája? (Newton.)

2.26. (Folytatás.) Általánosítsuk az előbbi feladatot.

2.27. Ha 12 ökör 3,5 holdnyi legelő termését 4 hét alatt, 21 ökör 10 hold ugyanolyan legelő termését 9 hét alatt fogyasztja el, akkor hány ökör fogyasztja el 24 hold legelő termését 18 hét alatt? (Newton.)

2.28. *Egy egyiptomi probléma.* A „Rhind Papyrus” ismeretünk fő forrása a régi egyiptomi matematikáról. A következő problémát onnan vettük. Az eredeti szöveg szerint 100 kenyér 5 ember között osztandó fel, de a szöveg a feltétel lényeges részét nem fejezi ki (vagy nem fejezi ki világosan); a megoldáshoz próbálgatással jut el: kísérletezéssel és az előző kísérlet helyesbítésével.

Itt következik az egyiptomi probléma elvont alakban és modern terminológiával; az olvasó menjen tovább egy lépéssel és írja fel a megfelelő egyenleteket: Egy szám-tani sorozatnak öt eleme van. Az elemek összege 100, a három nagyobb összege a két kisebb összegének hétszerese. Határozzuk meg a sorozatot.

2.29. Egy mértani sorozatnak három eleme van. Az elemek összege 19, és négyze-teik összege 133. Határozzuk meg az elemeket. (Newton után.)

2.30. Egy mértani sorozatnak négy eleme van. A legkisebb és a legnagyobb összege 13, a két közbülsőé 4. Határozzuk meg az elemeket. (Newton után.)

2.31. Néhány kereskedőnek 8240 korona közös tőkéje van; mindegyikük negyven-szer annyi koronát ad hozzá, mint ahányan társultak; az egész összeghez annyi szá-zalékot nyernek, mint ahányan vannak; a hasznot felosztják, mindegyikük tízszer annyi koronát kap, mint ahányan vannak, és még megmarad 224 korona. Számítsuk ki, hányan társultak. (Euler.)

2.32. *Síkmértan.* Egy a oldalú négyzetben öt, egyenlő (r) sugarú kör van, melyek egymást részben sem fedik. Egyik kör középpontja a négyzet középpontja, és érinti a másik négy kört, melyek mindegyike a négyzet két oldalát érinti (egy-egy sarokban vannak). Fejezzük ki r -et a -val.

2.33. *Newton egyenletek felállításával kapcsolatban mértani problémákról ír.* Tekint-sünk egy körbe írt egyenlő szárú háromszöget, a kör átmérőjét, a háromszög alap-ját és szárát. Lehet a feladat az, hogy az átmérőt fejezzük ki az adott szárral és alappal, vagy az alapot az átmérővel és a szárral, vagy végül a szárat az alappal és az átmérővel. Akár mi is a feladat, egy és ugyanazon egyenletre vezetjük visz-sza ... ugyanazon analízissel. (Newton.)

Jelölje d , s és b sorban az átmérő, a szárak és az alap hosszát (azaz a háromszög oldalainak hossza rendre s , s és b); keressünk d , s és b kapcsolatára egyenletet. Ez mindhárom problémát megoldja: az egyiket, amelyikben d , a másikat, amelyikben b és a harmadikat, amelyikben s az ismeretlen. (Mindig két adat van.)

2.34. (Folytatás.) Bíráljuk a 2.33. példa megoldására kapott egyenletet. $a)$ Egy-formán könnyű a három probléma? $b)$ A nyert egyenlet csak bizonyos feltételek mellett ad pozitív értékeket (d , b és s számára) az említett három esetben: pontosan felelnek-e meg a mértani helyzetnek a feltételek?

2.35. Legyenek G , H , V és U (ebben a sorrendben) egy négyszög csúcsai. Egy megfigyelő az $UV = x$ hosszúságot akarja meghatározni. Ismeri a $GH = l$ hosszát, és megméri a

$$GUH \sphericalangle \alpha, \quad HUV \sphericalangle = \beta, \quad UVG \sphericalangle = \gamma, \quad GHV \sphericalangle = \delta$$

szögeket.

Fejezzük ki x -et α , β , γ , δ és l segítségével.

(Emlékezzünk a 2.33. példára, és kövessük Newton útmutatását: azokat az adatokat és ismeretleneket válasszuk, melyekből úgy gondoljuk, hogy a legkönnyebben készíthetjük el az egyenletet.)

2.36. Fejezzük ki egy derékszögű háromszög átfogóját a területével és kerületével. (Newton.)

2.37. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott az egyik magassága, az alapja, és a másik két oldal összege. (Newton.)

2.38. Adott egy paralelogramma oldala és egyik átlója, határozzuk meg a másik átlóját. (Newton.)

2.39. Egy egyenlő szárú háromszög oldalai a , a és b . Vágjunk le belőle az alaphoz tartozó magasságvonalra szimmetrikusan két háromszöget úgy, hogy a visszamaradó szimmetrikus ötszög *egyenlő oldalú* legyen. Fejezzük ki az ötszög x oldalát a és b -vel.

(Ezt a problémát Leonardo da Pisa, akit Fibonacci-nak is neveztek, $a = 10$ és $b = 12$ számértékekkel tárgyalta.)

2.40. Egy hatszög egyenlő oldalú, oldalának hossza a . Minden második szöge derékszög, a másik három pedig tompaszög. (Legyen például a hatszög $ABCDEF$, az A , C és E csúcsoknál levő szögek derékszögek, a B , D és F csúcsoknál levők tompaszögek.) Határozzuk meg a hatszög területét.

2.41. Írjunk egyenlő oldalú háromszöget egy nagyobb egyenlő oldalú háromszögbe úgy, hogy a megfelelő oldalak egymásra merőlegesek legyenek. Így a nagyobb háromszög négy részre oszlik, egy-egy résznek a területe az egész területnek tört-része. Mekkora a törtrészek?

2.42. Egy háromszöget három egyenes vágással hét darabra osztunk. Négy közülük háromszög (három pedig ötszög). Egyik háromszöget három vágás határolja, a másik hármat az eredeti háromszög valamelyik oldala és két vágás. Válasszuk úgy a vágásokat, hogy a négy háromszög egybevágó legyen. Ennél a felosztásnál az adott háromszög területének hányadrésze lesz egy-egy háromszög alakú darab?

(Előnyös lehet először speciális alakú háromszöget vizsgálni, amire a megoldás is könnyű.)

2.43. P pont egy téglalap belsejében fekszik. Távolsága a téglalap egyik csúcsától 5 m, a szemben fekvő csúcsától 14 m, és a harmadik csúcsától 10 m. Mekkora P távolsága a negyedik csúcsától?

2.44. Adott egy négyzet síkjában fekvő pont távolsága a négyzet három csúcsától: a , b és c . Legyenek a és c szemben fekvő csúcsoktól vett távolságok.

(I) Határozzuk meg a négyzet s oldalhosszát.

(II) Vizsgáljuk meg eredményünket a következő négy speciális esetben:

$$(1) a = b = c$$

$$(2) b^2 = 2a^2 = 2c^2$$

$$(3) a = 0$$

$$(4) b = 0$$

2.45. Tízfilléreseket (egyenlő sugarú köröket) szabályos mintázatban rendezünk el egy nagyon-nagyon nagy asztalon (a végtelen síkon). Két mintázatot vizsgálunk.

Az elsőben mindegyik kör négy másikat érint. Az érintkező körök középpontjait összekötő egyenesszakaszok a síkot egybevágó négyzetekre vágják.

A másodikban mindegyik kör hat másikat érint. Az érintkező körök középpontjait összekötő szakaszok a síkot egybevágó szabályos háromszögekre vágják.

Mindkét esetben számítsuk ki, hogy a sík hány százalékát borítják a körök.
(A második mintázatból láthatunk részleteket a 3.8. ábrán.)

2.46. Térmértan. Az a élű kocka belsejében (egy kocka alakú dobozban) 9 egyenlő, r sugarú, egymást részben sem fedő gömb van (9 labdát tettünk a dobozba). Egyik gömb középpontja a kocka középpontja, és ez a gömb érinti a 8 másikat (a labdákat szorosan egymás mellé tettük); ezek pedig a kocka három-három lapját érintik (egy-egy sarokba vannak bedugva). Fejezzük ki r -et a -val.

(Vagy a -t r -rel. Ha van labdánk, készítsünk dobozt hozzá. Ennek a problémának síkmértani analógja a 2.32. példa: felhasználhatjuk-e annak az eredményét vagy módszerét?)

2.47. Találjunk ki a 2.43. példához analóg térmértani problémát.

2.48. „Szabályos”-nak nevezzük a gúlát, ha alaplapja szabályos sokszög, és magasságának talppontja az alaplap középpontja.

Egy szabályos négyzet alapú gúla mind az öt lapjának ugyanakkora a területe. Adott a gúla h magassága, számítsuk ki a felszínét.

2.49. (Folytatás.) Van valami analógia egy szabályos gúla és egy egyenlő szárú háromszög között; mindenesetre, ha a gúla lapjainak a száma adott, mindkétalakzat, a tér- és a síkbeli, két adattól függ.

Találjunk ki további feladatokat szabályos gúlákról.

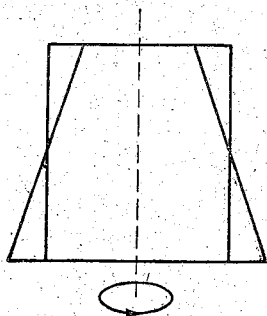
2.50. Találjunk ki a 2.38. példa eredményéhez hasonló térmértani tételt. (A 2.12. példa az általánosítás nyitja lehet.)

2.51. Fejezzük ki a 2.13. példában tárgyalt tetraéder felszínét az a , b és c adatokkal. (Látunk-e valamilyen analógiát?)

2.52. Tizenkét egybevágó egyenlő oldalú háromszögből nyolc szabályos oktaédert, négy pedig szabályos tetraédert határol. Határozzuk meg az oktaéder és a tetraéder térfogatának arányát.

2.53. Forgassunk egy háromszöget először a , azután b és végül c oldala körül. Három forgástest keletkezik. Határozzuk meg a forgástestek térfogatának, majd felszínének arányát.

2.54. Egy egyenlőtlenség. Téglalapunk és egyenlő szárú trapézunk egymáshoz viszonyított helyzetét a 2.10. ábra mutatja; van közös (függőleges) szimmetriatengelyük, ugyanaz a magasságuk és a területük; ha $2a$ és $2b$ a trapéz nagy és kis alapja, akkor a téglalap alapja $a + b$. A közös szimmetriatengely körül forgatva, a téglalap hengert, a trapéz pedig csónakakúpot ír le. A két test közül melyiknek nagyobb a térfogata? (Kiindulhatunk geometriai megfontolásból, de bizonyítsunk algebrával.)



2.10. ábra. Forgassuk az alakzatot

2.55. Szferométer. Egy gömb felületén legyen négy pont: A , B , C és D . Az A , B és C pontok alkossanak egyenlő oldalú háromszöget, melynek oldala a . A D pontból az $ABC \triangle$ síkjára állított merőleges hossza h , és talppontja e háromszög köré írható kör középpontja.

Adott a és h , számítsuk ki a gömb R sugarát.

(Ez a mértani alapja a szferométer — lencsék görbületének meghatározására szolgáló műszer — szerkesztésének. A szferométer három rögzített, párhuzamos „szár”-ának végpontja A , B és C ; ezzel szemben a negyedik, a mozgó „szár” végpontját D helyzetbe csavarjuk, és a csavarással a h távolságot mérjük.)

2.56. Grafikus menetrend. Vizsgáljuk több anyagi pont mozgását ugyanazon a pályán. Előnyös a derékszögű koordináta-rendszer alkalmazása; az abszcissza jelenti az időt (t), az ordináta pedig a pálya valamelyik rögzített pontjától a pálya mentén mért utat (s). Hogy ennek a fogásnak a hasznosságát megmutassuk, újra előveszünk a 2.4. (3) pontban már részleteiben is megtárgyalt problémát.

A t időt, illetve az s távolságot a repülőgép elindulásától, illetve kiindulási pontjától mérjük. Ha a repülőgép t órán át haladt, akkor a kiindulási ponttól vett távolsága:

$$s = (v - w) \cdot t.$$

Ezt az összefüggést rögzített v és w -vel, változó s és t -vel koordináta-rendszerünkben $v - w$ meredekségű (ez a sebesség), az origón [vagyis a $(0, 0)$ koordinátájú ponton, a repülőgép elindulási pontján] áthaladó egyenes ábrázolja. Visszarepüléskor az s távolságot és a t időt

$$s = -(v + w) \cdot (t - T)$$

összefüggés kapcsolja össze. Ez a $-(v + w)$ meredekségű $(T, 0)$ ponton áthaladó egyenes egyenlete (a repülőgép kiindulási pontra való visszatérését ábrázolja az előírt T időben).

A két egyenes metszéspontja jelenti azt a pontot (térben és időben), amely az oda-visszarepüléshez is egyaránt hozzátartozik, ahol a repülőgép megfordul. Ebben a pontban mindkét kifejezés érvényes s -re, és így

$$(v - w) \cdot t = -(v + w) \cdot (t - T).$$

Ebből

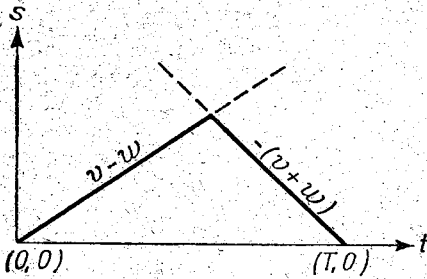
$$t = \frac{(v + w) \cdot T}{2v},$$

ezért (bármelyik egyenletből)

$$s = \frac{(v^2 - w^2) \cdot T}{2v}.$$

Ez a kifejezés jelenti a pálya legmesszebben fekvő pontjának a távolságát, amelyet a gép elért. Ezt az eredményt találtuk a 2.4. (3) pontban (s helyett x -szel).

A 2.11. ábrában (a szaggatott vonalakat hagyjuk figyelmen kívül) a repülést két egyenesszakaszból álló vonal jelzi; ezek a szakaszok szöget alkotnak abban a pontban, amelyiknek az ordinátája az elért legnagyobb távolságot mutatja. A grafikon a repülés egész történetét elmondja; megmutatja, hogy melyik adott időpontban hol volt a repülőgép, és mikor jutott valamelyik adott pontba — találóan nevezhetjük a repülés (a tárgyalt mozgás) *grafikus menetrendjének*.



2.11. ábra. Grafikus menetrend

2.57. Két postásfiú, A és B , elindult reggel, hogy találkozzék. 59 mérföld távolságra voltak egymástól. A két óra alatt 7 mérföldet haladt, B három óra alatt 8 mérföldet. B egy órával később indult útnak, mint A . Számítsuk ki, hány mérföldet tett meg A , mielőtt B -vel találkozott volna. (Newton.)

2.58. (Folytatás.) Általánosítsuk.

2.59. András és Béla egy utca két végén lakik. Andrásnak Béla házánál kell egy csomagot leadnia, Bélának pedig András házánál. Ugyanabban a pillanatban indulnak el, állandó sebességgel haladnak, és a csomag leadása után mindketten azonnal visszatérnek. Ellenkező irányból indulnak. Először András házától a méterre találkoznak, másodszor Béla házától b méterre.

(1) Milyen hosszú az utca?

(2) Ha $a = 300$ és $b = 400$, ki járt gyorsabban?

2.60. Béla, Péter és Pál együtt utazik. Péter és Pál jó gyalogló; bármelyikük óránként p km-t tesz meg. Bélának rossz a lába, és egy kis kocsit vezet, amelyben csak ketten férnek el, de hárman már nem; a kocsit c km-t tesz meg óránként. A három barát a következő rendszert alkalmazza: együtt indulnak; Pál Bélával a kocsiban, Péter gyalog. Egy idő múlva Béla leteszi Pált, aki gyalog megy tovább; Béla visszafordul, felveszi Pétert, és ettől kezdve Béla és Péter kocsiznak, míg utoléri Pált. Ekkor újra cserélnek, Pál utazik és Péter gyalogol éppúgy, mint elinduláskor. Az egész folyamat annyiszor ismétlődik, ahányszor szükséges.

(1) Mekkora utat (hány km-t) tesz meg a társaság óránként?

(2) Az utazási idő hányadrészében visz a kocsit csak egy embert?

2.61. (Folytatás.) Általánosítsuk: Béla, akinek rossz a lába és a kocsija csak két-személyes n barátjával, $A, B, C \dots$ és L -lel (kettő helyett) állapotodik meg ugyanígy; mindegyikük óránként p km-t tesz meg gyalog.

(Készítsünk grafikus menetrendet $n = 3$ -ra. Ellenőrizzük a $p = 0$, $p = c$, $n = 1$, $n = \infty$ határeseteket.)

2.62. Egy kő kútba esik, feneket ér. Határozzuk meg az ütdés okozta hangból a kút mélységét. (Newton.)

Meg kell mérnünk két időpont közti T időt: az első az, amikor elengedjük a követ, a második pedig az, amikor a hangot meghalljuk. Ismernünk kell még

a hang c terjedési sebességét és

a g gravitációs gyorsulást.

Adott T , c és g , határozzuk meg d -t, a kút mélységét.

2.63. Határozzuk meg három megfigyelésből egy üstökös pályáját, mely egyenes vonalon, egyenletesen mozog. (Newton.)

Legyen O a megfigyelő szeme, A , B és C az üstökös helyzete az első, a második és a harmadik megfigyeléskor. A megfigyelésekből ismerjük az

$$AOB \sphericalangle = \omega, \quad AOC \sphericalangle = \omega'$$

szögeket és azt a t , illetve t' időt, mely az első és második, illetve az első és harmadik megfigyelés között telt el. Az egyenletes mozgás feltételéből

$$\frac{AB}{AC} = \frac{t}{t'}.$$

Adott ω , ω' , t és t' , határozzuk meg $\beta = ABO \sphericalangle$ -t.

(Fejezzük ki β valamelyik trigonometrikus függvényét, pl. $\text{ctg } \beta$ -t ω , ω' , t és t' -vel. Az O pontot rögzítettnek tekintjük.)

2.64. *Annnyi egyenlet, ahány ismeretlen.* Határozzuk meg x , y és z -t az alábbi három egyenletből álló egyenletrendszerből:

$$\begin{aligned} 3x - y - 2z &= a, \\ -2x + 3y - z &= b, \\ -x - 2y + 3z &= c, \end{aligned}$$

ahol a , b és c adott.

(Kielégíthető-e a feltétel? Elegendő-e az ismeretlen meghatározására?)

2.65. *Több az egyenlet, mint az ismeretlen.* Határozzuk meg a p , q és r számot úgy, hogy az alábbi egyenlet x ismeretlenre azonosságot jelentsen

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (px^2 + qx + r)^2.$$

(A feladat: a szóban forgó adott negyedfokú polinomból való „pontos” négyzetgyökvonás. Ebben az esetben ez lehetséges, általában nem. Miért nem?)

2.66. Mutassuk meg, hogy lehetetlen olyan a , b , c , A , B és C (valós vagy komplex) számokat találni, hogy az

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ax + by + cz) \cdot (Ax + By + Cz)$$

egyenlőség az x , y és z független változókra azonosan teljesüljön.

2.67. *Kevesebb az egyenlet, mint az ismeretlen.* Valaki sertést, kecskét és juhot vásárolt, összesen 100 darabot 100 koronáért; a sertés darabja $3\frac{1}{2}$, a kecskéé $1\frac{1}{3}$ és a juhoké $\frac{1}{2}$ korona; hány darabot vásárolt mindegyikből? (Euler.)

Euler ezt a problémát a következő eljárással oldotta meg — melyet ő „*Regula Caeci*”-nek („Vak ember szabály”-ának) nevezett. Álljon x , y és z a vásárolt sertések, kecskék és juhek száma helyett; természetesen x , y és z pozitív egész számok. Fejezzük ki először a vásárolt állatok teljes számát, majd a vásárolt állatok árát, így

$$\begin{aligned} x + y + z &= 100, \\ 21x + 8y + 3z &= 600. \end{aligned}$$

A második egyenletet kissé (alkalmasan) átalakítottuk. Ha z -t elimináljuk, és y -ra oldjuk meg az egyenletet, akkor

$$y = 60 - \frac{18x}{5},$$

ebből következtetjük, hogy

$$\frac{x}{5} = \text{egész szám.}$$

egész szám.

Fejezzük be a megoldást.

2.68. Egy pénzverőnek (reméljük, hogy nem ver hamis pénzt) háromfajta ezüstje van. Márkánként (1 márka = 8 uncia) az első 7, a második $5\frac{1}{2}$, a harmadik $4\frac{1}{2}$ uncia finomságú. Ő 30 márka súlynyi, 6 unciás (márkánkénti finomságú) keveréket akar készíteni: hány márkát kell vennie az egyes fajtákból? (Euler; kiegészítés zárójelben.)

Magától értetődik, hogy a megoldást az *egész számok* között kell keresnünk. Ha a feltétel szerint az ismeretleneknek csak egész értéke lehet, akkor a problémát *Diophantikus problémának* nevezik.

× 2.69. Van egy számunk (egész szám), ha hozzáadunk 100-at, teljes négyzetet, ha hozzáadunk 168-at, másik teljes négyzetet kapunk. Melyik ez a szám?

× 2.70. Béla bélyeggyűjteménye három kötetből áll. A bélyegek kéttized része az első, néhány hetedrésze a második és 303 darabja a harmadik kötetben van. Hány bélyege van Bélának? (Elég-e a feltétel az ismeretlen meghatározására?)

× 2.71. Az iskolával szemben fekvő üzletben bizonyos fajta golyóstoll ára 50 Ft volt, de így kevés vevője akadt. Árcsökkentés után a megmaradt készlet értéke 3193 Ft lett. Mennyi volt egy toll leszállított ára? (Legendó-e a feltétel az ismeretlen meghatározására?)

2.72. *Descartes „Szabályai”*. A nagy bölcselelő és matematikus René Descartes-nak az a munkája, melyet a 2.1. pontban idéztünk, a mi tárgyalásunk szempontjából rendkívüli fontosságú.

Descartes „Szabályai”-t kéziratban, befejezetlenül találták meg, és csak halála után adták ki. Descartes 36 fejezetre tervezte, a mű azonban jelenleg csak 18 többé-kevésbé bevégzett fejezetből és három további fejezet rövid összefoglalásából áll. A többi valószínűleg sohasem írta meg. Az első 12 fejezetben olyan gondolkodási folyamatokkal foglalkozik, amelyek problémák megoldására hasznosak. A következő 12 fejezetben a „teljesen megértett” problémákat vizsgálja. Az utolsó 12 fejezetet arra szánta, hogy a „nem teljesen megértett” problémákat tárgyalja.⁷

Mindegyik fejezet szabállyal kezdődik, rövid és velős útmutatással az olvasó számára. A fejezet indokolja, magyarázza, példákkal látja el, részletesebben fejti ki a „Szabály”-ban összefoglalt eszmét. Ha a következőkben valamely fejezet bizonyos részleteit idézzük, megadjuk majd a hozzá tartozó szabály számát.⁸

⁷ XII. szabály, 429–430. old. „Teljesen megértett problémákat” közvetlenül tudunk tisztán matematikai problémákra visszavezetni. „Nem teljesen megértett” problémákat azonban nem. — Úgy látszik, hogy a kettő közt ez a legfontosabb különbség.

⁸ Úgy, ahogy azt a 7. lábjegyzetben tettük, a Charles Adam és Paul Tannery kiadásában megjelent „Oeuvres de Descartes” X. kötetét idézzük, amely a „Szabályok” eredeti latin szövegét tartalmazza; „Regulae ad directionem ingenii” 358–469. old. Más Descartes-idézetek is ugyanerre a kiadásra vonatkoznak, de azért a kötetet mindig megadjuk.

Descartes szava értékes vezetőnk lehet. Ám az olvasó megsértene a „Cartesiusi kétely” szerzőjének emlékezetét, ha mindent elhinne, amit Descartes mond, csak azért, mert ő mondta. A lényeg az, hogy az olvasó sem a jelen, sem más szerzőnek ne higgyen, de ne higgyen saját elhamarkodott benyomásainak sem. Miután a szerzőt becsülettel meghallgatta, az olvasó csak azt fogadja el, amit ön maga is világosan meglátott, felismert, és amiről jól feldolgozott tapasztalatai győzték meg. Így fog Descartes „Szabályai”-nak szellemében cselekedni.

2.73. *Egyszerűsítsük a problémát.* Idézzük Descartes-ot: *Mentesítsük a kérdést a felesleges fogalmaktól, és vezessük vissza legegyszerűbb alakjára.*⁹ Ez az útmutatás minden szinten, minden típusú problémára alkalmazható. Mi azonban specializáljuk. Vegyünk csak elő a szokásos iskolai feladatok közül valamilyen egyenletes mozgásra vonatkozó „sebességfeladatot” [olyasmit, amelyet a 2.4. (3) pontban vizsgáltunk]. A feladatban a mozgó tárgy lehet személy, autó, vonat vagy repülőgép. Ezen az elemi szinten ez közböbs: mindenképpen az egyenes pálya mentén egyenletesen mozgó anyagi pont mozgását tekintjük és tárgyaljuk. Ilyen egyszerűsítés egyes esetekben ésszerű, máskor viszont nevetséges. Egy mégis biztos: nem kerülhetünk el bizonyos fokú egyszerűsítést vagy absztrakciót, amikor valóságos tárgyakra vonatkozó problémát matematikai problémára vezetünk vissza. Nyilvánvaló, hogy matematikai problémákban absztrakt fogalmakkal dolgozunk, a valóságos tárgyakkal csak közvetett a kapcsolat azáltal, hogy a konkrétumról megfelelő átmenettel áttérünk az elvontra.

Mérnököknek és fizikusoknak problémáik tárgyalása közben komoly gondot kell szentelniük annak a kérdésnek, hogy milyen messze mehetnek az egyszerűsítésben és absztrakcióban, milyen részleteket hanyagolhatnak el, milyen kiesiny hatásokat hagyhatnak figyelmen kívül. Két ellentétes veszélyt kell kikerülniük: nem tehetik a matematikai feladatot túlságosan nehézé, de nem is egyszerűsíthetik le túlzott mértékben a fizikai helyzetet. Dilemmájukból kóstolót kaphatunk a legegyszerűbb szöveges feladatokban. A kezdő egyik nehézsége éppen az, hogy el kell érnie, meg kell értenie a leegyszerűsítés bizonyos fokát. Ha ez a nehézség sohasem kerül felszínre, az csak ront a helyzeten.

Van más, hasonló nehézség is. A matematikai példatárakban összegyűjtött feladatok hallgatólágonként feltételeznek bizonyos egyszerűsítéseket. A valóságban a sebességek stb. változóak, de az elemi példatárakban említett sebességek mindig állandóak. A kezdőnek meg kell ismerkednie az ilyen hallgatólágonkénti feltevésekkel és konvenciókkal, meg kell tanulnia bizonyos szokásos, rövidített fogalmazások pontos *interpretációját*; ezt is nyíltan meg kell tárgyalnunk, legalábbis egyszer-másszor.

(Van még egy az előbbiekkal összefüggő kérdés, amely olyan fontos, hogy szólnunk kell róla, bármilyen távol is esik vizsgálódásunk fő vonalától. Így csak röviden említjük: ki kell tértünk a probléma megfogalmazásakor használt egyszerűsítés és elhanyagolás mérvére, és kapcsolatba kell hoznunk a pontossággal, amellyel az ismeretlen számszerű meghatározását végezzük. Hibázhatunk akár úgy, hogy túlhaladunk, akár úgy, hogy el nem érjük a megfelelő mértéket; több vagy kevesebb tizedesre számolunk, mint ahogy az az adatok alapján jogosult. Kevés alkalom adódik elemi szinten ennek a fontos kérdésnek az illusztrálására, de ezt a kevés alkalmat nem szabad elmulasztani.)

Néhány itt említett kérdés tanulságos és nem is olyan triviális vizsgálatát a szerző egyik cikkében találhatjuk meg (idévez 18. alatt az irodalomjegyzékben).

⁹ XIII. szabály, 430. old.

2.74. Szükséges előismeretek. Mozgósítás és szervezés. Világos, hogy addig nem fordíthatjuk a fizikai feladatot egyenletekre, amíg nem ismerjük (vagy még inkább magunkévá nem tesszük) a reá vonatkozó fizikai tényeket. Például a 2.6. pontban tárgyalt feladatot nem oldhattuk volna meg Archimedes törvényének ismerete nélkül.

Mértani feladat egyenletekre fordításában a reá vonatkozó mértani tényeket használjuk: például Pythagoras tételét vagy hasonló háromszögek oldalainak arányosságát, vagy terület- és térfogat-kifejezéseket és így tovább.

Ha nincsenek meg a szükséges előismereteink, a problémát nem fordíthatjuk egyenletekre. De még ha egyszer el is sajátítottunk volna ilyen ismereteket, lehet, hogy éppen abban a pillanatban, amikor szükségünk lenne rá, nem jut eszünkbe, vagy ha szerencsésen eszünkbe is jut, nem ismerjük fel hasznosságát a szóban forgó esetben. Világosan láthatunk itt valamit, ami nyilvánvaló is: Nem elég, ha a szükséges előismeret bizonyos latens formában van meg bennünk; fel is kell tudnunk idézni, amikor a probléma megkívánja. Fel kell elevenítenünk, *mozgósítanunk*, saját célunkra hasznossá tennünk, problémánkra alkalmazzunk, szóval: *meg kell szerveznünk*.

Miközben munkánk halad, a feladat felfogása folytonosan változik; egyre több segédvonal tűnik fel az ábrán, egyre több segédismeretlen szerepel egyenleteinkben, egyre több anyagot mozgósítunk és viszünk bele a feladat szerkezetébe, míg végül telítve van: éppen annyi az egyenletünk, mint az ismeretlenünk, és az eredeti anyag a fokozatosan mozgósítással egyesítve szerves egésszé vált. [A 2.5. (3) pont jó példája ennek.]

2.75. Függetlenség és ellentmondás-mentesség. Descartes azt tanácsolja, hogy állítsunk fel annyi egyenletet, ahány ismeretlenünk van.¹⁰ Legyen n számú ismeretlenünk, az ismeretleneket jelöljük $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ -nel; a kívánt egyenletrendszer:

$$r_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$r_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$r_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

ahol $r_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ az x_1, x_2, \dots, x_n ismeretlenek polinomját jelenti, és a többi egyenlet bal oldalát is hasonlóan értelmezzük. Descartes azt tanácsolja a továbbiakban, hogy az egyenletrendszert végül is egyetlen egyenletre vezessük vissza.¹¹ Ez „általában” lehetséges (rendszerint, a szabályos esetben...), és „általában” egyenletrendszernek van megoldása (létezik x_1, x_2, \dots, x_n -re valós vagy komplex számértékeknek olyan rendszere, amelyek egyszerre elégítik ki az n egyenletet), és a megoldások száma csak véges (ez a szám a végső egyenlet fokszámától függ).

Vannak azonban kivételes (szabálytalan) esetek; nem vizsgálhatjuk itt ezeket teljes általánosságban, de vessünk egy pillantást a következő egyszerű példára.

Vizsgáljunk három lineáris egyenletből álló egyenletrendszert három ismeretlen-
nel:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0.$$

¹⁰ XIX. szabály, 468. old.

¹¹ XXI. szabály, 469. old.

x , y , z ismeretleneket, a tizenkét szimbólum: a_1 , b_1 , ..., d_3 pedig adott valós számokat jelentenek. Feltételezzük, hogy a_1 , b_1 és c_1 nem mind 0, ugyanez érvényes a_2 , b_2 , c_2 és a_3 , b_3 , c_3 esetében is. Ezen feltétel alapján mindegyik egyenlet — ha x , y és z -t térbeli derékszögű koordinátáknak tekintjük — egy-egy síkkal szemléltethető, s így a három egyenletet három síkból álló alakzat szemlélteti.

Ami a három lineáris egyenletből álló egyenletrendszert illeti, a következő eseteket különböztethetjük meg:

(1) Nem létezik megoldás, azaz nincsen három olyan valós szám (x , y , z), amely egyszerre elégitené ki mind a három egyenletet. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az egyenletek *inkompatibilisek*, *nem egyeztethetők* össze, az egyenletrendszer *ellentmondást tartalmaz*.

(2) Végtelen sok megoldás van; azt mondjuk, hogy a rendszer *határozatlan*. Például, ha minden olyan számhármast (x , y és z), amely az első két egyenletet kielégíti, a harmadiknak is elegend tesz. Ebben az esetben a harmadik egyenlet az első kettőtől *nem független*.

(3) Épp egy megoldás van: az egyenletek *függetlenek*, *ellentmondásmentesek*, és a rendszer *meghatározza* az ismeretleneket.

Szemléltessük három sík helyzetével a megfelelő eseteket, és írjuk le őket.

2.76. A megoldás unicítása. Anticipáció. Ha valamilyen sakkproblémának vagy rejtvenynek több megoldása van, akkor azt hiányosnak tekintjük. Úgy látszik, hogy általában az egyetlen megoldással rendelkező problémákat önkéntelenül előnyben részesítjük. Ezek tűnnek csak „ésszerű” vagy „tökéletes” problémáknak. Sőt még Descartes is előnyben részesítette; azt mondta: „*Úgy jellemezném a tökéletes kérdést, hogy az teljesen meghatározott, és az, amit kérdez, az adatokból levezethető.*”¹²

Vajon egyetlen megoldása van-e problémánknak? *Elegendő-e a feltétel az ismeretlen meghatározására?* Gyakran a kezdet kezdetén feltesszük ezeket a kérdéseket (és ajánlatos is ezt megtenni), amikor valamilyen problémán dolgozunk. Az ilyen túl korán feltett kérdésre nem is várható, de nem is szükséges a végleges válasz (melyet majd csak a teljes megoldás ad meg), csak valamilyen előzetes válasz, *anticipáció*, találgatás (a probléma megértését ez elmélyítheti). Erről az előzetes válaszról gyakran kiderül, hogy helyes, de egyszer-másszor csapdába eshetünk, mint azt a 2.8. pont példái mutatják.¹³

Mellesleg adódhat pl. az ismeretlen n -ed fokú egyenlet n különböző gyökéből, ahol $n > 1$, és a megoldás mégis lehet egyetlen, ha a feltétel azt is előírja, hogy az ismeretlen valós vagy pozitív, vagy egész érték legyen, és az egyenletnek éppen csak egyetlen ilyen gyöke van.

2.77. Minek a szöveges feladat? Remélem, sok embert meg fog hökkenteni, ha azt mondom, hogy a középiskolai matematikatanítás legfontosabb speciális feladata, hogy megtanítsa egyenletek felállítását szöveges feladatok megoldására. Pedig e felfogás mellett súlyos érvek szólnak.

Szöveges problémák megoldásakor a tanuló a valóságos helyzetet egyenletek felállításával ülteti át matematikai nyelvre. Alkalma van tapasztalni, hogy a matematikai fogalmak összefüggnek a valósággal, de ezt az összefüggést gondosan ki kell dolgozni. A tananyagban itt nyílik először alkalom ennek az alapvető tapasztalatnak a megszerzésére. Ez az első alkalom egyben az utolsó is lehet azoknak a tanulóknak

¹² XIII. szabály, 431. old.

¹³ Több ilyen típusú példára lásd MPR 1. kötet, 190–192. és 200–202. old. 1–12. feladatait.

a számára, akiknek a matematikára hivatásuknál fogva nem lesz szükségük. A leendő mérnökök és tudósok azonban, akik a matematikát hivatásszerűen fogják használni, főképpen arra fogják alkalmazni, hogy valóságos helyzeteket matematikai fogalmakkal fejezzenek ki. A világ olyan, hogy a mérnök több pénzt keres, mint a matematikus, és így szerződtehet matematikai problémái megoldására matematikust; ezért a leendő mérnöknek nincs szüksége matematikai problémák megoldására. De van egy olyan pont, amelyet a mérnök mégsem bízhat teljesen a matematikusra: minden mérnöknek elegendő matematikát kell tudnia ahhoz, hogy problémáit matematikai formában állítsa fel. És ha így a leendő mérnök a középiskolában a szöveges problémák megoldásával megtanulja az egyenletek felállítását, akkor kaphat először kedvet erre, akkor van először alkalma rá, hogy megszerezze azt a gondolkodásmódot, ami hivatásában a matematika felhasználásának a lényege.

2.78. További példákat. Találjunk ki néhány feladatot, amelyek az ebben a fejezetben vizsgáltakhoz hasonlóak, de azoktól mégis különböznek — lehetőleg olyan feladatokat, amelyeket meg is tudunk oldani.

3. FEJEZET

REKURZÍÓ

3.1. Egy kis felfedezés története

Van a kis Gaussról egy hagyományos történet, arról a kis Gaussról, akiből később Carl Friedrich Gauss lett, a nagy matematikus. Én a történetnek különösen azt a változatát szeretem, amelyet kisfiú koromban hallottam, és még azt sem bánom, vajon történelmileg hiteles-e vagy sem.

„A dolog akkor történt, amikor a kis Gauss első elemista volt. Egy napon nehéz feladatot adott fel a tanító: adják össze a tanulók 1, 2, 3 és így tovább 20-ig a számokat. A tanító azt remélte, hogy lesz egy kis szabad ideje, míg a fiúkat elfoglalja a hosszú összeadás. Ezért kellemetlenül lepte meg, hogy míg a többiek alig láttak neki a munkának, a kis Gauss előlépett, a tanító asztalára tette palatábláját és azt mondta: „itt van”. A tanító rá sem nézett a kis Gauss táblájára olyan biztosra vette, hogy a felelet csakis rossz lehet. El is határozta, hogy ezért a szemtelenségéért szigorúan megbünteti a fiút. Várt azonban addig, amíg az összes gyerek rátette tábláját a kis Gausséra, akkor kihúzta alóluk, és rápillantott. Mekkora volt a meglepetése, amikor a táblán egyetlen szám volt: a helyes! Mi volt ez a szám és hogyan jött rá a kis Gauss?”

Természetesen azt nem tudhatjuk pontosan, hogyan oldotta meg feladatát a kis Gauss, és soha nem is fogjuk megtudni. De elképzelhetünk valami olyat, ami ésszerűnek látszik. A kis Gauss mindenekelőtt gyerek volt, bár kivételesen értelmes és koraérett gyermek. Valószínűleg könnyebb volt neki a kérdés lényegét felfogni, mint más hasonló korú gyermeknek, és csak ennek a lényeges pontnak szentelte figyelmét. Világosabban és pontosabban képzelte el, mint a többi fiú, hogy *mit kell keresnie*: ahhoz, hogy megkapja

1
2
3
és így tovább
:
20

összegét.

-74

MEGOLDÁSTÍPUSOK

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
1	1	1	1	1
2	.	2	2	2
3	.	3	3	3
.
.
.	.	.	.	10
.	.	.	.	11
.
.
.
.	18	18	18	18
.	19	19	19	19
20	20	20	20	20

3.1. ábra. Egy felfedezés öt fázisa

A problémát másképpen, teljesebben látta, mint a többiek. Talán amint azt a 3.1. ábra egymás utáni *A*, *B*, *C*, *D* és *E* diagramjának valamilyen változata mutatja. A probléma eredeti felállítását az összeadandó számsorozat kezdetét hangsúlyozza. Hangsúlyozhatjuk a végét is (*B*), vagy még inkább a kezdetét és végét *egyformán* (*C*). Figyelmünk a két szélső számot ragadhatja meg, a legelső és a legutolsót, és megfigyelhetünk közöttük valamilyen speciális kapcsolatot (*D*). Ekkor jelenik meg az ötlet (*E*). Igen, a két szélétől egyenlő távol vett tagokat összegezve, mindig ugyanazt az összeget kapjuk:

$$1 + 20 = 2 + 19 = 3 + 18 = \dots = 10 + 11 = 21,$$

és ezért az egész sor teljes összege

$$10 \times 21 = 210.$$

Vajon csakugyan ezen az úton haladt a kis Gauss? Távol áll tőlem, hogy ezt állítanám. Én csak azt mondom, hogy természetes lett volna, ha valahogyan ilyen módon oldja meg a problémát. Hogyan oldjuk meg mi? Nyilván megértettük a helyzetet (*E*), „világosan és tisztán látjuk a valóságot”, ahogyan Descartes mondaná. Látjuk a keresett összegezés elvégzésének célszerű, kényelmes, jól alkalmazható módját. Hogyan jutottunk eddig a végső állomásig? Kezdetben a probléma felfogásának két ellentétes útja (*A* és *B*) között ingadoztunk, végül is sikerült ezeket a jobban kiegyensúlyozott (*C*) felfogásba olvasztani. Az eredeti ellentét kellemes harmóniába oldódott, és a (*D*)-re való átmenet egészen közel hozott minket a végső ötlethez. Vajon ugyanez volt a kis Gauss befejező ötlete? Ugyanezek a fokokon keresztül haladva érkezett el ideig? Vagy átugrott néhányon? Vagy egyszerűen egyetlen ugrással a végső következtetéshez ért? Ezekre a kérdésekre nem felelhetünk. A ragyogó ötletek

rendszerint hosszabb vagy rövidebb ingadozások és kétkedések után merülnek fel. Ez történt esetünkben, és valami hasonló játszódhatott le a kis Gauss fejében is.

Általánosítsunk. Induljunk ki a most megoldott problémából és helyettesítsük a speciális 20 értéket n tetszőleges pozitív egész számmal. A következő problémához jutunk: *Határozzuk meg az első n pozitív egész szám S összegét.*

Keressük így az

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

összeget. Az előzőekben kifejtett ötlet, mely lehetett a kis Gaussé is, a tagok párosítása volt: a sor elejétől bizonyos távolságra levő tagot a sor végétől ugyanolyan távolságra levő taggal párosítottuk. Ha algebrai eljárásokban kissé járatosak vagyunk, könnyen jutunk elgondolásunk következő módosításához.

Írjuk le kétszer az összeget, másodszor az eredeti sorrend megfordításával:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n, \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1. \end{aligned}$$

A tagoknak az előző megoldásban szereplő párosítása itt a megfelelő tagok egymás alá írásából tűnik ki. A két egyenlőség összeadásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2S &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1), \\ 2S &= n \cdot (n+1), \end{aligned}$$

$$S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Ez az általános képlet, $n = 20$ -ra a kis Gauss eredményét adja — ennek így is kell lennie.

3.2. Deus ex machina

Foglalkozzunk most is az előző pontban már megoldotthoz hasonló problémával: *Határozzuk meg az első n szám négyzetösszegét.*

Legyen S a keresett összeg (nem köt bennünket tovább az előző pont jelölése), s így most

$$S = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2.$$

Ennek az összegnek a kiszámítása nem egyszerű. Emberi természetünk arra vezet, hogy a hasonló helyzetben már bevált eljárást ismételjük meg; és így az előző pontra emlékezve, próbáljuk meg újra; írjuk le az összeget kétszer, másodszor fordított sorrendben:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 4 + 9 + \dots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2, \\ S &= n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 9 + 4 + 1. \end{aligned}$$

Csak hogy ennek a két egyenlőségnek az összeadása, amely az előbbi esetben olyan eredményes volt, ebben az esetben semmire sem vezet: a kísérlet nem sikerült, több optimizmussal hajtottuk végre, mint ésszel — valljuk be —, a választott megoldás szolgai utánzása ostobaság volt. (Sőt gondolkodásunk tehetetlenségének a felső foka: elgondolásunk ugyanaz maradt, megtartotta az előző irányt, holott a körülmények már megváltoztak.) De még ennek a rosszul sikerült próbálkozásnak sem kell egészen kárba vesznie; a felvetett probléma megfelelőbb értékeléséhez vezethet; igen, úgy látszik ez a probléma jóval nehezebb, mint az, amelyiket az előző pontban elintéztünk.

Íme egy megoldás. Induljunk ki egyik jól ismert képletünk speciális esetéből:

$$\begin{aligned} & (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1, \\ \text{ebből} \quad & (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

következik. Ez n minden értékére érvényes; írjuk le rendre egymás után $n = 1, 2, 3, \dots, n$ -re:

$$\begin{aligned} 2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ 4^3 - 3^3 &= 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\ &\dots\dots\dots \\ (n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1. \end{aligned}$$

Mi az, amit ezzel az n egyenlőséggel tennünk kell? Adjuk össze őket! Hála annak, hogy sok tag kiesik, az eredményül nyert egyenlőség bal oldala nagyon egyszerű. A jobb oldalon három oszlopot kell összeadnunk. Az első oszlop kifejezhető S -sel, a négyzetek keresett összegével — ez remek! Az utolsó oszlop n darab egységből áll — ez könnyű. A középső oszlop kifejezhető az első n szám összegével — de az előző pontból ismerjük ezt az összeget. Azt kapjuk, hogy

$$(n+1)^3 - 1 = 3S + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n.$$

Ebben az egyenlőségben mindent ismerünk (azaz n -nel fejeztünk ki), kivéve S -et, és így meghatározhatjuk S -et:

$$\begin{aligned} 2(n^3 + 3n^2 + 3n) &= 6S + 3(n^2 + n) + 2n \\ S &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}, \end{aligned}$$

vagy végül

$$S = \frac{n(n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Hogy tetszik ez a megoldás?

Nekem az az olvasó tetszene, de nagyon, akinek az előző megoldás nem tetszik, feltéve, ha nemtetszését helyesen meg is indokolná. Mi a baj ezzel a megoldással?

A megoldás biztosan helyes. Sőt hatásos, világos és rövid. Emlékezzünk csak, milyen nehéznek tartottuk a problémát. Józanul nem várhattunk világosabb vagy rövidebb megoldást. Amennyire én látom, csak egy komoly ellenérv lehet: a megoldás „*deus ex machina*” (mesterkelt), előbukkan a semmiből. Olyan, mint egy kalapból elővarázsolt nyúl. Hasonlítsuk össze ezt a megoldást az előző pontéval. Ott valamennyire előre láthattuk, honnan jön a megoldás létre. A felfedezés útjáról is tanulhattunk egy keveset. Reménykedhettünk, hogy egyszer majd hasonló helyzetben önállóan is eljutunk ilyen eredményhez. De ennek a pontnak az eljárása semmi utalást sem ad a felfedezés forrására. Egyszerűen fejbe kólintott a kezdő egyenlőséggel, s abból már minden következzett. Nincs semmi útmutatás arra, hogyan jöhettünk volna rá önállóan erre az egyenlőségre. Ez csalódás. Azért jöttünk ide, hogy problémamegoldást tanuljunk, de hogy lehet az itt bemutatott megoldásból tanulni?¹

3.3. És mégsem hagyhatjuk ezt kihasználatlanul

Mégiscsak *tanulhatunk* valami olyat az előbbiekből, ami fontos a problémamegoldásban. Igaz, hogy a megoldás előadása nem gyújtott világosságot bennünk, az invenció forrása rejtve maradt, és így a megoldás trükknek, ravasz mesterfogásnak tűnt. Szeretnénk-e a trükk mögé látni? *Akkor próbáljuk meg magunk is alkalmazni*, mindjárt ki fogjuk ismerni. Az ötlet olyan hatásos volt! Igazán nem engedhetjük meg magunknak, hogy fel ne használjuk.

Induljunk általánosítással. Nézzük ugyanabból a szempontból az előző két feladatot (3.1. és 3.2. pont). Vizsgáljuk az első n egész szám k -adik hatványának az összegét:

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k.$$

Az előző pontban azt találtuk, hogy

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

és még előbb

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

s ezekhez vegyük még hozzá a nyilvánvaló, de talán nem haszon nélküli extrém esetet:

$$S_0 = n\text{-et.}$$

¹ Lásd MPR 2. kötet 146–148. old. „*Deus ex machina*” és „*Heuristic justification*” pontokat.

Kiindulva a $k = 0, 1$ és 2 speciális esetekből, felvethetjük az általános feladatot: fejezzük ki S_k -t hasonlóan. A speciális eseteket áttekintve még azt is gyaníthatjuk, hogy S_k az n -nek $k + 1$ -ed fokú polinomja.

Természetes, hogy általános esetekben is kipróbáljuk azt a fogást, amely olyan jól bevált $k = 2$ esetében. Előbb azonban vizsgáljuk meg a legközelebbi speciális esetet ($k = 3$). Utánozzuk eggyel magasabb szinten azt, amit a 3.2. pontban láttunk. Ez nem is lehet nagyon nehéz.

A binomiális képlet alkalmazásából indulunk ki eggyel nagyobb, $k = 4$, kitevővel:

$$(n + 1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,$$

ebből

$$(n + 1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

következik.

Ez n minden értékére érvényes. Írjuk le egymás után $n = 1, 2, 3, \dots, n$ -re:

$$2^4 - 1^4 = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1$$

$$4^4 - 3^4 = 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(n + 1)^4 - n^4 = 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1.$$

Mint az előbb, adjuk össze ezt az n egyenlőséget. A bal oldalon sok tag kiesik. A jobb oldalon négy oszlopot kell összeadnunk. Mindegyik oszlopban az első n szám ugyanolyan kitevőjű hatványának az összege van; mindegyik oszlopban S_k más és más speciális esete szerepel:

$$(n + 1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + S_0.$$

S_2 , S_1 és S_0 -t kifejezhetjük n -nel (l. fent). Ezeket a kifejezéseket használva, egyenlőségünket átalakíthatjuk:

$$(n + 1)^4 - 1 = 4S_3 + 6 \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + 4 \frac{n(n + 1)}{2} + n,$$

és itt S_3 kivételével minden tagot n -nel fejezünk ki. S_3 meghatározásához már csak egy kis egyenletrendezés szükséges:

$$\begin{aligned} 4S_3 &= (n + 1)^4 - (n + 1) - 2n(n + 1) - n(n + 1)(2n + 1) \\ &= (n + 1)[n^3 + 3n^2 + 3n - 2n - n(2n + 1)] \\ S_3 &= \left[\frac{n(n + 1)}{2} \right]^2. \end{aligned}$$

Elérkeztünk a kívánt eredményhez, és még a hozzávezető út is tanulságos: másodszor alkalmaztuk ugyanazt a fogást, talán kezdenek kirajzolódni eljárásunk általános körvonalai. Emlékezzünk a „hagyományos matematikatanár” mondására: „A módszer olyan fogás, amelyet kétszer alkalmazunk”².

3.4. Rekurzió

Mi volt az előző, 3.3. pontban munkánk fordulópontja? S_3 meghatározásánál visszatértünk az előbb már meghatározott S_2 , S_1 és S_0 -ra. Ez megvilágítja a 3.2. pontbeli fogást. S_2 -t úgy kaptuk, hogy az azelőtt meghatározott S_1 -re és S_0 -ra tértünk vissza.

Használhatjuk ugyanezt az eljárást S_1 levezetésére is, amelyet a 3.1. pontban egészen más módszerrel nyertünk. Nagyon is jól ismert képlet szerint

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

Írjunk fel néhány speciális esetet:

$$2^2 - 1^2 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$3^2 - 2^2 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$4^2 - 3^2 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2 \cdot n + 1.$$

Összeadással:

$$(n+1)^2 - 1 = 2S_1 + S_0.$$

Természetesen $S_0 = n$, és így

$$S_1 = \frac{(n+1)^2 - 1 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

s ez a 3.1. pont végeredménye.

Miután ugyanazzal az eljárással dolgoztunk a $k = 1, 2$ és 3 speciális esetekben, így azt habozás nélkül alkalmazhatjuk az S_k általános összeg meghatározására. Szükségünk van a binomiális képletre $k+1$ kitevővel:

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + \binom{k+1}{1} n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \dots + 1$$

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = (k+1)n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \dots + 1,$$

² G. I., A hagyományos matematikatanár. 56. old.

felsoroljuk a speciális eseteket:

$$2^{k+1} - 1^{k+1} = (k+1)1^k + \binom{k+1}{2}1^{k-1} + \dots + 1$$

$$3^{k+1} - 2^{k+1} = (k+1)2^k + \binom{k+1}{2}2^{k-1} + \dots + 1$$

$$4^{k+1} - 3^{k+1} = (k+1)3^k + \binom{k+1}{2}3^{k-1} + \dots + 1$$

.....

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = (k+1)n^k + \binom{k+1}{2}n^{k-1} + \dots + 1.$$

Összeadással

$$(n+1)^{k+1} - 1 = (k+1)S_k + \binom{k+1}{2}S_{k-1} + \dots + S_0.$$

Ebből az egyenlőségből meghatározhatjuk (n -nel fejezhetjük ki) S_k -t, ha előzően S_{k-1} , S_{k-2} , ..., S_1 és S_0 -t már ismerjük. Például, ahogyan az előbbieken az S_0 , S_1 , S_2 és S_3 -ra kapott kifejezésekből egy kis rendezéssel az S_4 -et levezethettük. Elérve S_4 -et, haladhatunk S_5 -höz és így tovább.³

A 3.2. pont mesterfogását követve, mely annyira „deus ex machina”-ként tűnt elő, olyan megoldástípushoz jutottunk, amely megérdemli, hogy megformulázzuk és — távolabbi felhasználhatóságára való tekintettel — emlékeztetünkbe vessük. Ha olyan sorozattal van dolgunk, amilyen $S_0, S_1, S_2, \dots, S_k$ is volt, akkor lehetőség van arra, hogy az elemeit rendre egymás után kiszámítsuk. Ehhez két feltételnek kell teljesülnie:

Először, valahonnan ismernünk kell a sorozat első elemét (S_0 kiszámítása kézenfekvő volt).

Másodszor, kell lennie valamilyen kapcsolatnak, amely a sorozat általános elemét az előző elemekkel összeköti (e pont utolsó egyenlőségében S_k -t összekapcsoltuk S_0, S_1, \dots, S_{k-1} -gyel. A 3.2. pontban ez a „fogás” már előrevetette az árnyékát).

Egyik elem meghatározását követi tehát a másiké, *rekurzíven*, minden egyes alkalommal a megelőző elemekhez visszatérve. Ez a *rekurzió* fontos megoldástípusa.

³ Ez a módszer Pascaltól származik; lásd Oeuvres de Blaise Pascal, Brunschvig és P. Broux kiadásában, 3. kötet, 341–367. old.

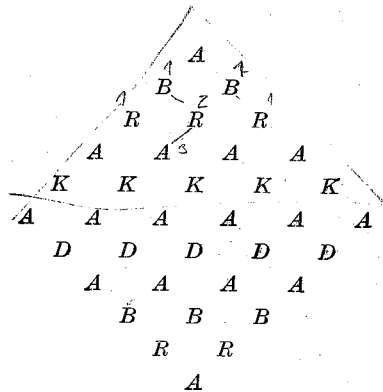
3.5. Abrakadabra

Az „abrakadabra” szó valami olyat jelent, mint „bonyolult képtelenség”. Manapság ezt a szót lekicsinylően használjuk, de egykor bűvös szó volt, misztikus alakban vésték amulettekbe (a 3.2. ábrához némileg hasonlóan), és az akkori emberek azt hitték, hogy az ilyen amulettek megóvják viselőjüket a betegségtől és balsorstól.

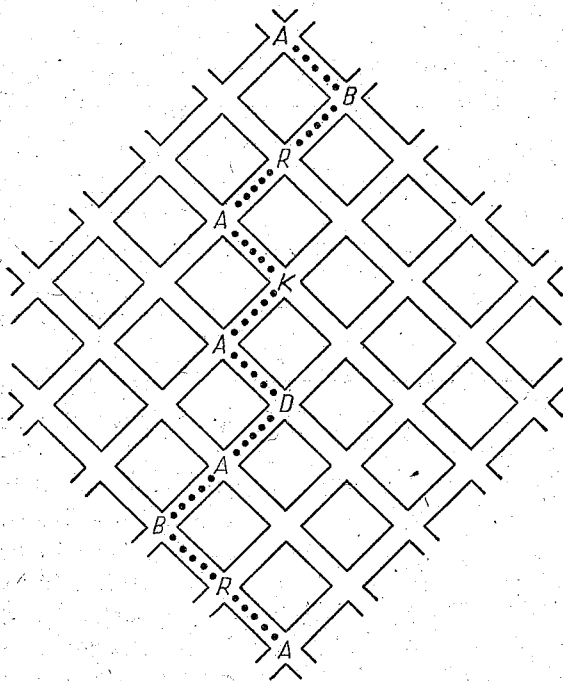
Hányféleképpen olvashatjuk az „abrakadabra” szót a 3.2. ábrában? Feltéve, hogy a legfelső A-val (az északi sarokkal) kezdjük, és lefelé haladunk, mindig a következő betűhöz megyünk (délkeletre vagy délnyugatra), míg az utolsó A-t elérjük (a déli sarkot).

A kérdés érdekes. Csak növelheti érdeklődésünket, ha valami ismerőset is észreveszünk mögötte. Arra emlékeztet, ahogyan járni vagy kocszni szoktunk valamilyen városban. Képzeljük el, hogy a város csupa négyzet alakú háztömbből áll, ahol az utcák egyik fele északnyugatról délkeletnek, a másik fele az előbbieket keresztezve, északkeletről délnyugatnak tart. A 3.2. ábra bűvös szavának olvasása megfelel az úthálózat valamelyik zezzugos útvonalának. Ha a 3.3. ábra felnagyított zezzugos útvonalán sétálunk, a kezdő A-tól a végső A-ig tíz háztömbnyit teszünk meg. Az úthálózat két végpontja között sok más tíz háztömb hosszú útvonal van, de ennél rövidebb nincs. *Határozzuk meg az úthálózat két végpontja közti, különböző legrövidebb útvonalak számát* — ez az általános, valóban érdekes probléma húzódik meg a 3.2. ábra bűvös szavának speciális problémája mögött.

Az általános fogalmazásnak különböző előnyei lehetnek. Olykor elindít a megoldás felé, ez történik ebben az esetben is. *Ha nem tudjuk megoldani a 3.2. ábrán felvetett problémát* (márpedig valószínűleg nem is tudjuk), *próbáljuk meg egyszerűbb, rokon probléma megoldását*. Ebben segíthet az általános fogalmazás: arra ösztönöz, hogy idetartozó egyszerűbb esetekkel próbálkozzunk.



3.2. ábra. Egy bűvös szó

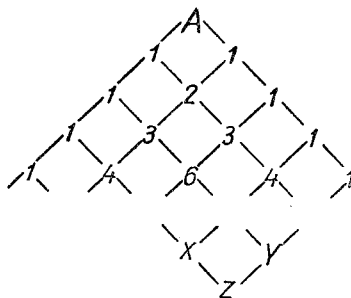


3.3. ábra. A zezugos út a leg-rövidebb

Ha az úthálózat két sarka elég közel van (közelebb, mint a 3.3. ábra két szélső A -ja), könnyű a különböző zezugos útvonalak megszámlálása: megrajzolhatjuk egyiket a másik után, és így mindet áttekinthetjük. Hallgassunk erre az ötletre és kövessük rendszeresen. Kezdjük az A pontnál és menjünk lefelé. Figyeljük azokat a pontokat, amelyekhez egy tömb mentén, azután azokat, amelyekhez kettő, majd azokat, melyekhez három vagy négy, vagy még több mentén haladva jutunk el. Tekintsük át és számoljuk meg mindegyik pontra vonatkozóan azokat a legrövidebb zezugos útvonalakat, melyek A -val kötik össze. A 3.4. ábrában néhány így kapott számot bejelöltünk (de az olvasó jusson el önállóan ezekhez a számokhoz, sőt még kissé többhöz is, vagy legalábbis ellenőrizze). Figyeljük ezeket a számokat — észreveszünk valamit?

Akinek van elegendő előismerete, az sok mindent észrevehet. De aki még sohasem látta a 3.4. ábrában elének tárt számok táblázatát, az is érdekes kapcsolatokat figyelhet meg: a 3.4. ábra minden 1-től különböző száma a táblázat két számának, éspedig az északnyugati és északkeleti szomszédjának az összege. Például

$$4 = 1 + 3, \quad 6 = 3 + 3.$$



3.4. ábra. Határozzuk meg a legrövidebb zezugos útvonalak számát

Megfigyelés útján fedezhetjük fel ezt a törvényt, mint ahogyan a természet-tudós is tudományága törvényeit megfigyelés útján fedezi fel. És ha már fel-fedeztük mindezt, megkérdezhetjük magunktól: Miért van ez így? Mi ennek az oka?

Az ok elég egyszerű. Figyeljük meg hálózatunk három sarkát, az X , Y és Z pontokat. Relatív helyzetüket a 3.4. ábra mutatja: Z északnyugati szomszédja X , északkeleti szomszédja Y . Ha A -ból indulva a hálózat valamelyik legrövidebb útvonalán Z -t akarjuk elérni, akkor vagy X -en, vagy Y -on át kell haladnunk. Ha egyszer X -hez bárhogy eljutottunk, onnan Z -hez már csak egyféleképp haladhatunk tovább, és ugyanez áll Y -tól Z -hez menet is. Ezért, az A -tól Z -hez vezető legrövidebb útvonalak száma két tag összege: egyenlő az A -ból X -be vezető legrövidebb útvonalak számához hozzáadva az A -ból Y -ba vezetőket. Ez teljesen érthetővé teszi megfigyelésünket, és bizonyítja az általános szabályt.

Ezen alapvető szempont megvilágítása után egyszerű összeadással tovább bővíthetjük a táblázatot, míg csak a 3.5. ábrában látható nagyobbat nyerjük. Ennek déli sarka adja meg a kívánt választ: a 3.2. ábra búvós szavát épp 252-féleképpen olvashatjuk.

3.6. Pascal-háromszög

Az olvasó valószínűleg felismerte az előző fejezetben vizsgált számokat és azok sajátos elrendezését. A 3.4. ábra számai *binomiális együtthatók*, és háromszög alakú elrendezésüket *Pascal-háromszög*nek szokás nevezni. (Pascal maga „arithmetikai háromszög”-nek nevezte.) A 3.4. ábra háromszögéhez további sorokat csatolhatunk és így tulajdonképp vég nélkül kiterjeszthetjük. A 3.5. ábra táblázata egy nagyobb háromszög alakú elrendezésből kivágott négyzet alakú részlet.

Pascal: „*Traité du triangle arithmétique*”-jét megelőző időkben más szerzők írásaiban is találkozunk binomiális együtthatókkal és háromszög alakú elrendezésükkel. Mindenesetre Pascal érdeme ebben a tárgykörben bőven elegendő annak megokolására, hogy az ő nevét használjuk.

(1) Alkalmas *jelölést* kell bevezetnünk a Pascal-háromszög számaira. Ez a lépés nagyon fontos. Számunkra a háromszög minden egyes számának mértani jelentése van: a háromszög csúcsától az illető pontig vezető, különböző zegzugos útvonalak számát mutatja. Ezek az útvonalak ugyanannyi — mondjuk n számú — tömb mentén haladnak. Továbbá, mindezek az útvonalak meg-egyeznek a délnyugati irányban beírt tömbök és a délkeleti irányban beírtak számában. Legyenek b és j ezek a számok (b balra és j jobbra — természetesen mindkét esetben lefelé). Világos, hogy

$$n = b + j.$$

Ha a három szám, n , b és j közül bármelyik kettő adott, akkor a harmadik teljesen meghatározott, és így a pont is, amelyikhez tartozik. (b és j tulajdonképp a pont derékszögű koordinátái olyan rendszerben, amelynek origója a Pascal-háromszög csúcsa, egyik tengelye délnyugatra mutat, másik délkeletre.) Például a 3.3. ábrában mutatott útvonal utolsó A betűjére

$$b = 5, \quad j = 5, \quad n = 10,$$

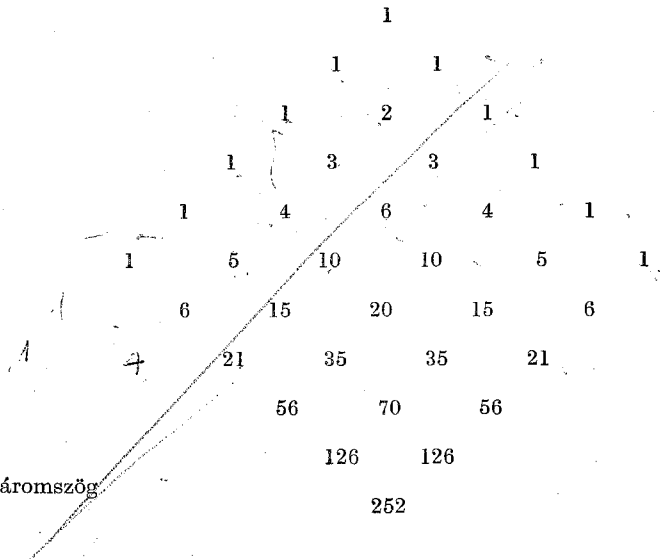
és ugyanennek az útvonalnak a második B -jére

$$b = 5, \quad j = 3, \quad n = 8.$$

$\binom{n}{j}$ -vel fogjuk jelölni (ez a jelölés Eulerre nyúlik vissza) a Pascal-háromszög csúcsától azon pontig vezető legrövidebb zegzugos útvonalak számát, melyet n (az összes tömbök száma) és j (a jobbra lefelé levő tömbök száma) határoz meg. Például a 3.5. ábra szerint

$$\binom{8}{3} = 56, \quad \binom{10}{5} = 252.$$

A 3.4. ábra számaihoz tartozó szimbólumokat a 3.6. ábrában gyűjtöttük össze. Azok a szimbólumok, amelyeknek ugyanaz a felső száma (ugyanaz az n), egy vízszintes vonalon vannak (az n -edik sorban — egy derékszögű háromszög alapján; a derékszögű háromszögek közös csúcsát 0-adik sornak tekintjük). Azok a szimbólumok, amelyeknek ugyanaz az alsó száma (ugyanaz a j) egy ferde vonalon (a j -edik utca mentén) vannak. Másik ferde vonalon — az utcákra merőleges „keresztutca” mentén helyezkednek el azok a szimbólumok, amelyeknek a felső és alsó száma között ugyanakkora a különbség (ugyanaz az $n - j = b$).



3.5. ábra. Egy négyzet a háromszög alakú elrendezésből

A 3.5. ábrán látható négyzetnek a szemben fekvő oldalait az ötödik és a 0-adik utcák továbbá az ötödik és 0-adik keresztutca alkották. A 3.4. ábrában a negyedik sort emeltük ki.

(2) Van a Pascal-háromszögnek a mértani vonatkozásokon kívül számolási vonatkozása is. A határ vonalán levő minden szám (0-adik utca, és 0-adik keresztutca) egyenlő 1-gyel (világos, hogy ezen utcasarkokhoz a kiindulóponttól csak egy legrövidebb útvonal vezet). Ezért

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & & \binom{1}{1} & & \binom{1}{1} & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \binom{n}{j-1} & & \binom{n}{j} & & \\
 & & & & \binom{n+1}{j} & & & &
 \end{array}$$

3.6. ábra. A Pascal-háromszög szimbólumai

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Ezt az összefüggést találóan a Pascal-háromszög *határfeltételének* nevezhetjük.

A Pascal-háromszög belsejében a számok vízszintes sorokon (vagy alapokon) vannak. Az $(n + 1)$ -edik sorban levőket az előző, n -edik sor két-két szomszédos száma így adja:

$$\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}$$

lásd 3.6. ábrát. Ezt az egyenlőséget találóan a Pascal-háromszög *rekurziós formulájának* nevezzük.

A számítás szempontjából az $\binom{n}{j}$ számokat a Pascal-háromszög rekurziós formulája és határfeltétele meghatározza (vagy, ha úgy tetszik, definiálja).

3.7. Teljes indukció

Amikor a Pascal-háromszög valamelyik számát a rekurziós formula felhasználásával számítjuk ki, akkor már ismernünk kell az előző sor két számát. Jó lenne azonban, ha volna az ilyen előzetes ismerettől független számolási eljárásunk is. Van egy jól ismert képletünk, melyet a binomiális együtthatók *explicit képletének* nevezünk. Ez ilyen független kiszámítást jelent:

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-j+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot j}.$$

Pascal értekezése az explicit képletet tartalmazza (szavakkal meghatározva, nem a mi modern jelöléseinkkel), de nem mondja meg, hogyan fedezte fel, és felesleges sokat elmélkednünk azon, hogyan fedezhette fel. (Talán először csak kitalálta — gyakran találunk rá így valamire, mikor megfigyeléseket teszünk, és általánosításukkal kísérletezünk; lásd a 3.39. példa megoldásánál tett megjegyzést.) Pascal az explicit képlet figyelemre méltó bizonyítását adta. Szenteljük tehát teljes figyelmünket az ő bizonyítási módszerének.⁴

Szükségünk van bevezető megjegyzésre. Az explicit képletet — így, amint van — nem alkalmazhatjuk a $j = 0$ esetre. Megállapodhatunk viszont abban, hogy ha $j = 0$, akkor a szimbólum jelentése 1:

$$\binom{n}{0} = 1.$$

⁴ Lásd Pascal's Oeuvres, idézett mű 455–464. old. 3. lábjegyzet, különösen a 456–457. old. Az itt következő tárgyalásban modern jelöléseket alkalmaztunk, és kevésbé lényeges részleteket megváltoztattunk.

Az explicit formula $j = n$ esetre alkalmazásából következik

$$\binom{n}{n} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n} = 1,$$

és ez a helyes eredmény. Az explicit képletet ezért csak $0 < j < n$ -re kell bizonyítanunk, tehát a Pascal-háromszög belsejében, ahol a rekurzív formulát használhatjuk. Idézzük Pascalt lényegtelen változtatásokkal, melyek közül néhányat szögletes zárójelbe teszünk.

Bár ez az állítás [az explicit képlet] végtelen sok esetet tartalmaz, én nagyon rövid bizonyítását adom. Két lemmát tételezek fel.

Az első lemma szerint az állítás az első sorra érvényes, ami világos. [Az explicit képlet $n = 1$ -re érvényes, mert ebben az esetben j összes lehetséges értéke: $j = 0$ és $j = 1$; így a bevezető megjegyzés érvényes rá.]

A második lemma szerint: ha az állítás valamilyen sorra érvényes [valamilyen n értékre], akkor szükségképp érvényes a következő sorra $[n + 1]$ -re].

Ebből belátjuk, hogy az állítás szükségképp érvényes n minden értékére. Az érvényessége $n = 1$ -re az első lemmából, de akkor $n = 2$ -re a második lemmából, $n = 3$ -ra ugyanebből következik és így tovább, *ad infinitum*.

És így még csak a második lemma bizonyítása van hátra.

A második lemmával megegyezően feltételezzük, hogy az explicit képlet az n -edik sorra érvényes, tehát n egy bizonyos értékére és j minden szóba jövő értékére ($j = 0, 1, 2, \dots, n$ -re). Speciálisan

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1) \dots (n-j+2)(n-j+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (j-1) \cdot j},$$

és (ha $j \geq 1$)

$$\binom{n}{j-1} = \frac{n(n-1) \dots (n-j+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (j-1)}.$$

Adjuk össze a két egyenlőséget, és használjuk a rekurzív képletet; szükség-szerű következményként adódik

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{j} &= \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} = \frac{n(n-1) \dots (n-j+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (j-1)} \left[\frac{n-j+1}{j} + 1 \right] = \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-j+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (j-1)} \cdot \frac{n+1}{j} = \\ &= \frac{(n+1)n(n-1) \dots (n-j+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot j}. \end{aligned}$$

Tehát az explicit képlet érvényessége bizonyos n -re magával hozza annak érvényességét $n + 1$ -re. Ez pontosan az, amit a második lemma állít — ezzel tehát bebizonyítottuk.

Pascal idézett szavainak történelmi fontossága van. Az ő bizonyítása az első példája az egyik alapvető következtetési típusnak, melyet rendszerint *teljes indukciónak* nevezünk.

Ez a következtetési típus további tanulmányozást érdemel.⁵ Ha a teljes indukciót nem elég gondosan vezetjük be, megzavarhatjuk a kezdőt. Ördögi fogásnak tűnhetik neki.

Tudjuk, hogy az ördög veszélyes: ha a kisujjunkat nyújtjuk, egész kezünk kell neki. Márpedig Pascal második lemmája pontosan ezt teszi. Az első lemma érvényesítésével épp csak egy ujjunkat nyújtjuk, ez $n = 1$ esete. A második lemma elveszi a második ujjunkat is ($n = 2$ eset), majd a harmadikat ($n = 3$ eset), majd a negyediket és így tovább. És végül minden ujjunkat elveszi, még ha végtelen sok lenne, akkor is.

3.8. Előre a felfedezésre!

Az előző három pontban elvégzett munka után most már van a Pascal-háromszögben levő számoknak — a binomiális együtthatóknak — három különböző értelmezése.

(1) *Mértani értelmezés.* A binomiális együttható bizonyos úthálózat két megadott sarka közti, különböző legrövidebb zezugos útvonalak száma.

(2) *Számoldósos (rekurzív) értelmezés.* A binomiális együtthatókat a rekurzív képlettel és a határfeltétellel definiálhatjuk.

(3) *Explicit képlet.* Ezt bizonyítottuk Pascal módszerével a 3.7. pontban.

Másik értelmezési módot a számok elnevezése juttat eszünkbe.

(4) *Binomiális tétel.* Határozatlan (vagy változó) x -re és bármely nem negatív n egész számra a következő azonosságunk van:

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n.$$

Bizonyítására lásd a 3.1. példát.

A Pascal-háromszög számait másként is értelmezhetjük. Ezek a számok sok érdekes kérdésben játszanak szerepet, és sok érdekes sajátosságuk van. „Ennek a számtáblázatnak kitűnő és csodálatos sajátosságai vannak” — írta Jacob Bernoulli „*Ars Conjectandi*”-jában (Basel, 1713; lásd Második rész, III. fejezet, 88. oldal). „Megmutattuk, hogy a kombinációk lényege van benne elrejtve

⁵ G. I. Indukció és teljes indukció 137–144. old.; MPR I. kötet 108–120. old.

(lásd a 3.22. – 3.27. példákat). Azok, akik a geometriával közelebbi ismeretségben vannak, azt is tudják, hogy a matematika egészének mély titkai benne rejtőznek.” Az idők változnak, ma már világosan látjuk a választ Bernoulli korának sok rejtett kérdésére. Ha azonban az olvasó tanulságos és talán lebilincselő gyakorlatot akar, akkor itt a kiváló alkalom: figyelje meg gondosan a Pascal-háromszög számait, megfigyeléseit kapcsolja össze a számok egyik vagy másik, esetleg többféle értelmezésével. Olyan sok lehetőség van, hogy ezek között csak akad megfelelő.

Egyébként a fejezet első négy pontjában másik témát is érintettünk (az első n egész szám ugyanolyan hatványkitevőjű hatványainak összegét). Továbbá találoztunk két fontos általános megoldástípussal (rekurzió és teljes indukció), melyeket még további példákra kell alkalmaznunk, ha teljesen meg akarjuk érteni őket. És így mind több és több tárul ki előttünk.

3.9. Figyeljük meg, általánosítsuk, bizonyítsuk, és másképpen is bizonyítsuk!

Térjünk vissza kiindulási pontunkhoz, és újra vessünk rá egy pillantást.

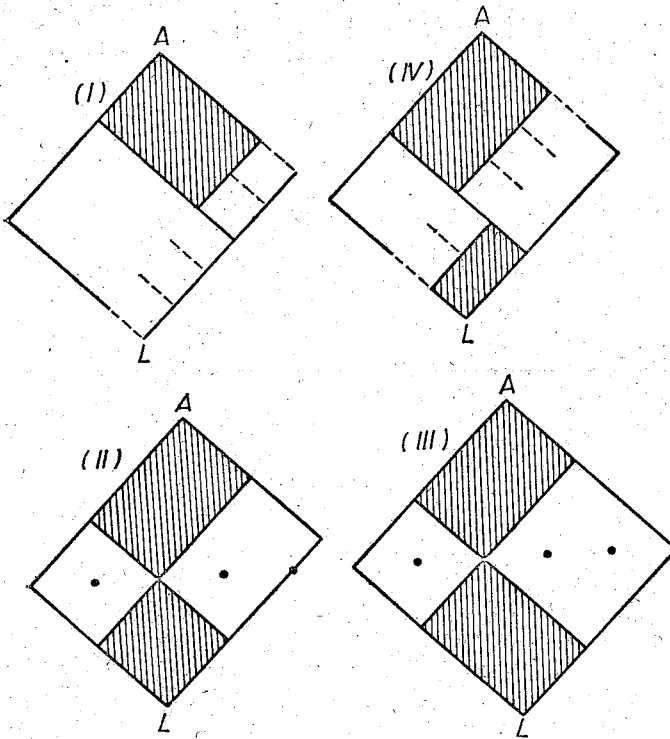
(1) A 3.2. és 3.3. ábra bővös szavából indultunk ki vagy még inkább, ezzel a szóval összefüggő problémából. Mi volt az ismeretlen? Egy úthálózat leg-rövidebb útvonalainak száma az első A -tól az utolsó A -ig; azaz a négyzet északi sarkától a déli sarkáig. Az ilyen zezugos útvonalnak valahol keresztteznie kell a négyzet vízszintes átlóját. A vízszintes átló mentén hat lehetséges kereszttezési pont van (utcasarkok; A betűk). Problémánkban tehát a zezugos útvonalak hat különböző típusa lehetséges — hány útvonal van egy-egy típusból? Ez az *új probléma*.

Specializáljuk a feladatot. Válasszunk a vízszintes átlón egy meghatározott kereszttezési pontot, például balra a harmadikat ($b = 3, j = 2, n = 5$ a 3.6. pont jelölésével). Bármelyik, a választott ponton keresztülhaladó útvonal két részből áll: a felső rész a négyzet északi sarkától indul, és a választott pontban végződik, az alsó rész a kiválasztott pontból indul, és a déli sarkon végződik; lásd a 3.3. ábrát. Előzőleg meghatároztuk (lásd a 3.5. ábrát) a különböző felső útvonalak számát:

$$\binom{5}{2} = 10.$$

A különböző alsó útvonalak száma ugyanennyi. Bármelyik felső részt bármelyik alsóval egyesítve teljes útvonalat nyerünk [amint azt a 3.7. (III) ábra is sejteti]. Ezért az ilyen útvonalak száma

$$\binom{5}{2}^2 = 100.$$



3.7. ábra. Lehetőségek

Természetesen, hasonlóan számíthatjuk ki a vízszintes átló bármely más adott pontján keresztülhaladó zezugos útvonalak számát. Így az eredeti probléma új megoldásához jutunk: a 3.2. ábra bűvös szavát

$$1 + 25 + 100 + 100 + 25 + 1$$

féleképp olvashatjuk. Ennek az összegnek a 3.5. pont végén talált eredménnyel egyeznie kell; és ez valóban egyenlő 252-vel.

(2) *Általánosítsuk* az előző eredményt. A 3.3. ábra négyzetének egy oldala öt tömbből áll. Általánosítással (5-ről n -re térve) azt találjuk, hogy

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

„A Pascal-háromszög n -edik sorában a számok négyzetösszege egyenlő a $2n$ -edik sor középső számával.” Az (1) alatti okoskodásunk lényegében bizonyítja ezt az általános állítást is. Igaz, hogy az $n = 5$ speciális esetet tárgyaltuk (sőt az ötödik sornak is csak az egyik speciális pontját vettük tekintetbe),

de a vizsgált speciális esetben nincsen speciális sajátosság (és nincs félrevezető sajátosság). Így okoskodásunk általánosan is érvényes. Az olvasó számára hasznos gyakorlat lehet okoskodásunk megismétlése, különös tekintettel az általánosságra — 5 helyett n -t kell mondania.⁶

(3) *Más kiindulás.* Az eredmény meglepő. Jobban megértenénk, ha más oldalról is eljutnánk hozzá.

A 3.8. pontban felsorolt különböző értelmezéseket átnézve, próbáljuk meg azt is, hogy eredményünket a binomiális képlethez kapcsoljuk. És tényleg, van is ilyen kapcsolat:

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= \dots + \binom{2n}{n} x^n + \dots = \\ &= (1+x)^n (1+x)^n = \\ &= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[\binom{n}{n} + \dots + \binom{n}{2} x^{n-2} + \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{0} x^n \right].\end{aligned}$$

Összpontosítsuk figyelmünket az x^n együtthatójára. Az első sorban a jobb oldalon az x^n együtthatója a (2) pontban adott általános egyenlet jobb oldala, melyre a második bizonyítást keressük. Térjünk vissza az utolsó sor két tényezőjének szorzatára; a felírásnál a binomiális együtthatók szimmetriáját kihasználva:

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}.$$

És így ebben a szorzatban x^n együtthatója nyilvánvalóan a (2) alatti egyenlőség bal oldala, amit bizonyítanunk kellett. Íme a bizonyítás: x^n együtthatójának mindkét esetben meg kell egyeznie, mert x -ben azonosságunk van.

Példák és megjegyzések a 3. fejezethez

Első rész

Az első rész példái és megjegyzései az első négy ponthoz kapcsolódnak.

3.1. Bizonyítsuk be a 3.8. (4) pontban említett (és a 3.4. pontban használt) binomiális tételt.

(Használjunk teljes indukciót. A 3.8. pontban említett első három értelmezésből melyik felel meg leginkább jelenlegi célunknak?)

⁶ Ez egy reprezentáló speciális eset; lásd MPR 1. kötet, 25. old. 10. példa.

3.2. Az általános esettel egyenértékű speciális eset. A 3.8. (4) pontban állított és a 3.1. példában bizonyított azonosság az alábbi általánosabb azonosság speciális esete ($a = 1$, $b = x$)

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n.$$

Mutassuk meg, hogy a speciális esetből is következik az általánosabb azonosság?

3.3. E fejezet első három pontjában kiszámítottuk (a 3.3. pontban értelmezett) S_k -t $k = 1, 2, 3$ -ra; a $k = 0$ eset nyilvánvaló volt. E kifejezések összehasonlítása a következő általános tételhez vezethet: S_k az n -ben $k + 1$ -ed fokú polinom, és a legmagasabb fokú tag együtthatója $1/(k + 1)$.

Tételünk állítása az, hogy

$$S_k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \dots$$

(a pontok n -ben alacsonyabb fokú tagokat jelentenek); ez a tétel fontos szerepet játszott az integrálszámítás történetében.

Bizonyítsuk be a tételt; használjunk teljes indukciót.

3.4. Számítsuk ki n néhány kis értékére az S_4/S_2 hányadost, és ennek alapján próbáljunk S_4 -re valamilyen képletet kitalálni.

$$\begin{array}{cccccc} n = 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \\ S_4/S_2 = 1, & \frac{17}{5}, & 7, & \frac{59}{5}, & \frac{89}{5}. \end{array}$$

Egységesség kedvéért írjuk inkább:

$$\frac{5}{5}, \frac{17}{5}, \frac{35}{5}, \frac{59}{5}, \frac{89}{5}.$$

A számlálók 6 többszöröseihez állnak közel, mert így írhatók:

$$6 \cdot 1 - 1; \quad 6 \cdot 3 - 1; \quad 6 \cdot 6 - 1; \quad 6 \cdot 10 - 1; \quad 6 \cdot 15 - 1.$$

Biztosan felismeri az olvasó ezeket a számokat:

$$1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad 15.$$

Ha sikerül S_4 -re valamilyen kifejezést találnunk, bizonyítsuk be ennek érvényességét a 3.4. ponttól függetlenül teljes indukcióval.⁷

3.5. Számítsuk ki S_4 -et a 3.4. példától függetlenül, a 3.4. pontban jelzett módszerrel.

⁷ A speciális és az általános eset ilyen egyenértékűsége zavarhatja a filozófusokat vagy a kezdőket. A matematikában azonban eléggé szokásos; lásd MPR 1. kötet, 23. old. 3. és 4. példa.

⁸ Nagyon hasonló, de egyszerűbb eset szélesebb körű vizsgálatát lásd MPR 1. kötet, 108–110. old.

3.6. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{aligned}n &= S_0, \\n^2 &= 2S_1 - S_0, \\n^3 &= 3S_2 - 3S_1 + S_0, \\n^4 &= 4S_3 - 6S_2 + 4S_1 - S_0,\end{aligned}$$

és általában

$$n^k = \binom{k}{1} S_{k-1} - \binom{k}{2} S_{k-2} + \binom{k}{3} S_{k-3} - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} S_0.$$

(Ez a képlet hasonló a 3.4. pont alapképletéhez, de azért mégis különbözik tőle.)

3.7. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{aligned}S_1 &= S_1, \\2S_1^2 &= 2S_3, \\4S_1^3 &= 3S_5 + S_3, \\8S_1^4 &= 4S_7 + 4S_5,\end{aligned}$$

és általánosan $k = 1, 2, 3, \dots$ -ra

$$2^{k-1} S_1^k = \binom{k}{1} S_{2k-1} + \binom{k}{3} S_{2k-3} + \binom{k}{5} S_{2k-5} + \dots$$

A jobb oldalon az utolsó tag S_k vagy kS_{k+1} aszerint, hogy k páratlan vagy páros; (Ez a példa a 3.6. példához hasonló; n^k helyett ott S_0^k -t is írhatnánk.)

3.8. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{aligned}3S_2 &= 3S_2, \\6S_2S_1 &= 5S_4 + S_2, \\12S_2S_1^2 &= 7S_6 + 5S_4, \\24S_2S_1^3 &= 9S_8 + 14S_6 + S_4,\end{aligned}$$

és általánosan $k = 1, 2, 3, \dots$ -ra

$$3 \cdot 2^{k-1} S_2 S_1^{k-1} = \left[\binom{k}{0} + 2 \binom{k}{1} \right] S_{2k} + \left[\binom{k}{2} + 2 \binom{k}{3} \right] S_{2k-2} + \dots,$$

a jobb oldalon az utolsó tag $(k+2)S_{k+1}$ vagy S_k aszerint, hogy k páratlan vagy páros.

3.9. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{aligned}S_3 &= S_1^2, \\S_5 &= S_1^2(4S_1 - 1)/3, \\S_7 &= S_1^2(6S_1^2 - 4S_1 + 1)/3,\end{aligned}$$

és általánosan S_{2k-1} az $S_1 = n(n+1)/2$ kifejezésnek olyan k -ad fokú polinomja, amely osztható S_1^2 -tel, feltéve, hogy $2k-1 \geq 3$. (Ez a 3.3. pont általánosítása.)

3.10. Mutassuk meg, hogy

$$S_4 = S_2(6S_1 - 1)/5,$$

$$S_6 = S_2(12S_1^2 - 6S_1 + 1)/7,$$

$$S_8 = S_2(40S_1^3 - 40S_1^2 + 18S_1 - 3)/15,$$

és általánosan az S_{2k}/S_2 kifejezés S_1 -nek $(k-1)$ -ed fokú polinomja. (Ez a 3.4. példa megoldásában elért eredmény általánosítása.)

3.11. Vezessük be az

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k = S_k(n)$$

jelölést. Ez a 3.3. pontban bevezetett jelölésnél kifejezőbb (vagy sajátosabb); k nem negatív és n pozitív egész számot jelent.

Terjesszük ki n értelmezési tartományát (de k értelmezési tartományát nem): $S_k(x)$ jelentse x -nek azt a $(k+1)$ -ed fokú polinomját, amely megegyezik $S_k(n)$ -nel, ha $x = 1, 2, 3, \dots$; például

$$S_3(x) = \frac{x^2(x+1)^2}{4}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $k \geq 1$ -re ($k = 0$ -ra nem)

$$S_k(-x-1) = (-1)^{k-1} S_k(x).$$

3.12. Határozzuk meg az $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ összeget, vagyis az első n páratlan szám összegét. (Soroljunk fel annyi különféle nekiindulást, ahányat csak tudunk.)

3.13. Határozzuk meg $1 + 9 + 25 + \dots + (2n-1)^2$ összeget.

3.14. Határozzuk meg $1 + 27 + 125 + \dots + (2n-1)^3$ összeget.

3.15. (Folytatás.) Általánosítsuk.

3.16. Határozzuk meg $2^2 + 5^2 + 8^2 + \dots + (3n-1)^2$ összeget.

3.17. (Folytatás.) Általánosítsuk.

3.18. Találjunk egyszerű kifejezést a következő összegre:

$$1 \cdot 2 + (1+2)3 + (1+2+3)4 + \dots + [1+2+3+\dots+(n-1)]n.$$

(Természetesen igyekezzünk felhasználni eddigi munkánk megfelelő részeit. Melyiknek a használhatóságára van több remény: az eredményekére vagy a módszerekére?)

3.19. Képezzük a következő $\frac{n(n-1)}{2}$ számú különbséget

$$2 - 1,$$

$$3 - 1, 3 - 2,$$

$$4 - 1, 4 - 2, 4 - 3,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$n - 1, n - 2, n - 3, \dots, n - (n - 1).$$

Számítsuk ki a) összegüket, b) a szorzatukat, c) a négyzetösszegüket.

3.20. Értelmezzük E_1, E_2, E_3, \dots -t a következő azonossággal:

$$\begin{aligned} x^n - E_1 x^{n-1} + E_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n E_n &= \\ &= (x-1)(x-2)(x-3) \dots (x-n). \end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy

$$E_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$E_2 = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24},$$

$$E_3 = \frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2}{48},$$

$$E_4 = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(15n^3 + 15n^2 - 10n - 8)}{5760},$$

és mutassuk meg, hogy E_k [melyet inkább $E_k(n)$ -nel kellene jelölnünk, mert n -től függ] általánosan is n -nek $2k$ -ad fokú polinomja.

[Nagy segítséget jelenthet bizonyos algebrai tétel ismerete; E_k az első n egész szám ún. k -adik elemi szimmetrikus függvénye; az első n egész szám k -adik hatványának összege $S_k = S_k(n)$. Ellenőrizzük, hogy $E_k(k) = k!$]

3.21. A teljes indukció két alakja. Az olyan A állításnak, amely teljes indukcióval bizonyítható, jellegzetessége az, hogy végtelen sok $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ esetre vonatkozik; tulajdonképp A egyenértékű az A_1, A_2, A_3, \dots együttes állításával. Például, ha A a binomiális tétel, A_n a következő azonosság érvényességét állítja:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

(lásd a 3.1. példát); a binomiális tétel pedig azt állítja, hogy ez az azonosság $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ esetekre fennáll.

Vizsgáljunk három állítást az A_1, A_2, A_3, \dots tételek sorozatával kapcsolatban:

I.) A_1 igaz.

II.a) A_n -ből következik A_{n+1} .

II.b) $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ és A_n együttes állításából következik A_{n+1} .

Kétféle eljárást különböztethetünk meg.

a) I.)-ből és II.a)-ból következtethetjük, hogy A általánosan igaz $n = 1, 2, 3, \dots$ -ra; ezt a következtetést a 3.7. pontban Pascallal együtt vontuk le.

b) I.)-ből és II.b)-ből következtethetjük, hogy A_n általánosan igaz $n = 1, 2, 3, \dots$ -ra; a 3.3. példa megoldásában jártunk el így.

Úgy érezhetjük, hogy a két eljárás, a) és b) közti különbség inkább alaki, mint lényegbevágó. Próbáljuk tisztázni és világosan indokolni ezt az érzésünket.

Második rész, LAJKA ÉS RUDAI

3.22. Tíz fiú, Béla, Rudi, Albi, Karsci, András, Dini, Anti, Balázs, Rezső és Attila táborozásra indult. Este ötös csoportokra oszlottak: az egyik csoport sátrat vert, a másik vacsorát főzött. Az ilyen két csoportra oszlásra hány különböző eset lehetséges? (Segíthetne itt valamilyen bűvös szó?)

3.23. Mutassuk meg, hogy n különböző elemből álló halmaznak $\binom{n}{j}$ különböző, j elemből álló részhalmaza van. [Hagyományosabb nyelven: n elemből kiválasztható j elem kombinációinak száma $\binom{n}{j}$.]

3.24. Adott a síkban n „általános helyzetű” pont, ezen azt értjük, hogy közülük nincs olyan három, amelyik ugyanazon az egyenesen lenne. Hány egyenest rajzolhatunk két-két adott pont összekötésével? Hány háromszöget képezhetünk, ha az adott pontokat választjuk csúcsoknak?

3.25. (Folytatás.) Vessünk fel és oldjunk meg analóg problémát a térben.

3.26. Határozzuk meg egy n oldalú konvex poligon átlóinak a számát.

3.27. Határozzuk meg, hogy hány metszéspontja van egy n oldalú konvex poligon átlóinak. Csak a poligon belsejében fekvő metszéspontokat tekintsük. Feltételezzük, hogy a poligon „általános”, azaz nincs három olyan átlója, melynek közös pontja lenne.

3.28. Egy poliédernek hat lapja van. (Feltételezhetjük, hogy a poliéder szabálytalan, és nincsen még két egybevágó lapja sem.) Az egyik oldalt pirosra, kettőt kékre és hármat barnára festünk. Hány különböző módon lehetséges ez?

3.29. Egy poliédernek n lapja van (nincs köztük két egybevágó). A lapok közül p -t pirosra, k -t kékre és b -t barnára festünk; feltételezzük, hogy $p + k + b = n$. Hány különböző módon lehetséges ez?

3.30. (Folytatás.) Általánosítsuk.

Harmadik rész

Ha az olvasó a következő feladatokból néhányat megold, többféle kiindulásra gondolhat, és azok közül választhat. (Lásd a 3.8. pontot; a binomiális együtthatók kombinatorikus értelmezését; lásd a 3.23. példát, az további értelmezésre is alkalmat ad.) Ugyanazon problémához több oldalról való közeledés fontosságát Leibniz hangsúlyozta. Egyik megjegyzésének szabad fordítása: „Ugyanazon mennyiség két különböző kifejezésének összehasonlításával ismeretlent határozhatunk meg. Ugyanazon eredmény két különböző levezetésével új módszert találhatunk.”

3.31. Mutassuk meg annyi féleképp, ahány féleképp csak tudjuk, hogy

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

3.32. Vizsgáljuk a Pascal-háromszög egy sora mentén a számok összegét:

$$\begin{array}{rcl} 1 & & = 1 \\ 1 + 1 & & = 2 \\ 1 + 2 + 1 & & = 4 \\ 1 + 3 + 3 + 1 & & = 8 \end{array}$$

Ezek a számok általános tételre utalnak. Ki tudjuk-e találni? Ha kitaláltuk, be is tudjuk bizonyítani? Ha bebizonyítottuk, találhatunk rá más bizonyítást is?

3.33. Figyeljük meg, hogy

$$\begin{array}{rcl} 1 - 1 & & = 0 \\ 1 - 2 + 1 & & = 0 \\ 1 - 3 + 3 - 1 & & = 0 \\ 1 - 4 + 6 - 4 + 1 & & = 0 \end{array}$$

Általánosítsuk, bizonyítsuk, és bizonyítsuk másképpen is.

3.34. Képezzük a Pascal-háromszög 3. utcája mentén az első hat szám összegét:

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 = 126.$$

Keressük meg ezt a számot a Pascal-háromszögben; keressünk analóg összefüggéseket, általánosítsuk, bizonyítsuk és bizonyítsuk másképpen is.

3.35. Adjuk össze a 3.5. ábrában elhelyezett harminchat számot, próbáljuk meg a Pascal-háromszögben megkeresni az összeg helyét; fogalmazzuk meg az általános tételt és bizonyítsuk be. (Ilyen sok szám összeadása unalmas feladat: ha okosan végezzük, könnyen rájöhethetünk a lényegére.)

3.36. Próbáljuk meg felismerni a következő összefüggésben az egymással kapcsolatba hozható számokat és megállapítani helyüket a Pascal-háromszögben:

$$1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 126.$$

Figyeljünk (vagy emlékezzünk) néhány analóg esetre, általánosítsuk, bizonyítsuk, bizonyítsuk másképpen is.

3.37. Próbáljuk meg felismerni a következő összefüggésben az egymással kapcsolatba hozható számokat és megállapítani helyüket a Pascal-háromszögben:

$$6 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + 1 \cdot 21 = 126.$$

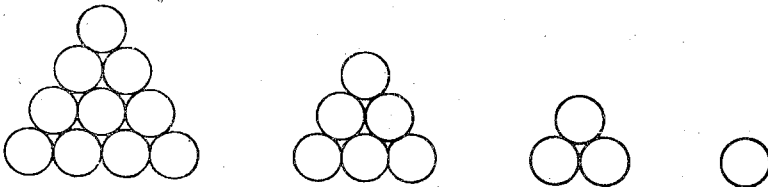
Figyeljünk (vagy emlékezzünk) néhány analóg esetre, általánosítsuk, bizonyítsuk, bizonyítsuk másképpen is.

3.38. A 3.8. ábra az alakzatok végtelen sorozatából a négy elsőt mutatja: egyenlő oldalú háromszögekhez hasonló alakba rendezett egyenlő sugarú, érintkező köröket. Azok a körök, amelyek nincsenek a szélén, hat körülöttük levőt érintenek. Az n -edik alakzatban n kör van a háromszög mindegyik oldala mentén; az alakzatban levő összes körök számát nevezzük az n -edik *trianguláris számnak*. Fejezzük ki n -nel az n -edik trianguláris számot, és állapítsuk meg a helyét a Pascal-háromszögben.

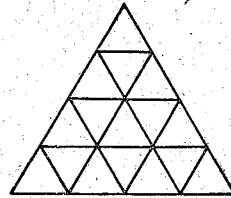
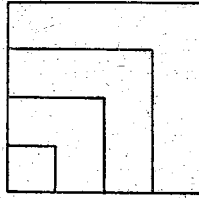
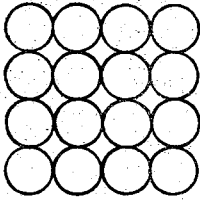
3.39. Helyettesítsük a 3.8. ábrában a köröket egy-egy olyan gömbbel (márványgolyóval), melynek a kör az egyenlítője. Rögzítsünk vízszintes síkon 10 golyót olyan elhelyezésben, mint a 3.8. ábrán. Tegyük 6 golyót, mint egy második réteget, a tetejébe (ezek éppen beleillenek a résekbe), ezek fölé még hármat, harmadik rétegnek, és végül egyet a legtetejére. Ez az

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

golyóból álló alakzat szabályos tetraéderrel hozható épp olyan kapcsolatba, mint ahogy szabályos háromszögekkel állnak összefüggésben a 3.8. ábra körhalmazai. A *negyedik*, úgynevezett *piramidális szám* 20. Fejezzük ki az n -edik piramidális számot n polinomjaként, és állapítsuk meg a helyét a Pascal-háromszögben.



3.8. ábra. Az első négy trianguláris szám



3.9. ábra. A negyedik négyzetszám

3.40. Másként is képezhetünk gúla alakú halmot márványgolyókból: kezdjük n^2 golyóból négyzet alakba rendezett réteggel (lásd a 3.9. ábrát), a tetejére tegyünk $(n-1)^2$ -ből álló réteget, azután $(n-2)^2$ -ből állót, és így tovább, végül a legtetejére egyetlen golyót. Hány golyóból áll a halom?

3.41. Tulajdonítsunk az

$$\binom{n_1}{j_1} \binom{n_2}{j_2} \binom{n_3}{j_3} \cdots \binom{n_h}{j_h}$$

szorzatnak olyan értelmet, hogy egy úthálózat bizonyos feltételt kielégítő zezzugos útvonalai számát jelentse.

3.42. Vizsgáljuk mindazokat az útvonalakat, amelyek a Pascal-háromszög csúcsából a legrövidebb úton vezetnek az n -nel és j -vel (az összes tömbök, illetve a jobbra lefelé levő tömbök számával) meghatározott ponthoz. Mindegyiknek van közös pontja a háromszög szimmetriatengelyével (a 3.3. ábrában az első A -t az utolsóval összekötő egyenessel), mégpedig a közös kezdőpont, a csúcs. Tekintsük ennek a halmaznak azokból az útvonalakból álló részalmazát, melyeknek a szimmetriatengellyel nincs több közös pontjuk, és határozzuk meg számukat, N -et.

A feladat jobb megértése érdekében vizsgáljuk meg a következő speciális eseteket:

$$j = 0, \quad n, \quad n/2 \quad (n \text{ páros})$$

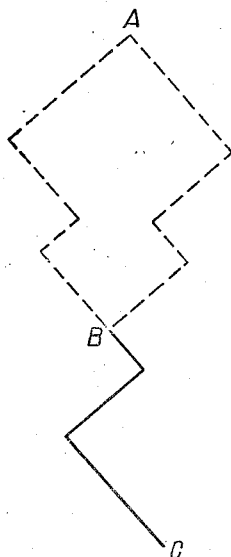
$$N = 1, \quad 1, \quad 0.$$

Megoldás. Elég a $j > n/2$ esetet tárgyalni; azaz a zezzugos útvonalak közös alsó végpontja legyen a szimmetriatengellyel kettéosztott sík jobb felében. A teljes halmazban $\binom{n}{j}$ útvonal van. Ezeket feloszthatjuk három, egymást részben sem fedő részalmazra.

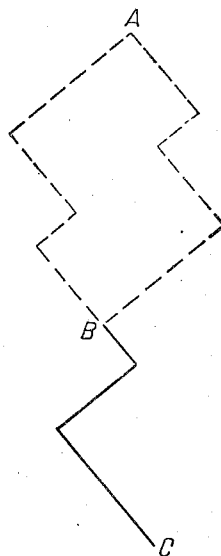
(1) A fent definiált részalmaz. Elemeinek számát, N -t kell meghatároznunk. A halmaz olyan útvonalának, amelyik *nem* tartozik ehhez a részalmazhoz, A -n kívül más pontja is van a szimmetriatengelyen.

(2) A balra lefelé levő tömbnél kezdődő útvonalak. Az ilyen útvonalak a szimmetriatengelyt valahol keresztezik, mivel végpontjuk a másik félsíkban fekszik. E részalmaz útvonalainak száma nyilvánvalóan $\binom{n-1}{j}$.

(3) Olyan útvonalak, amelyek sem az (1), sem a (2)-höz nem tartoznak. Jobbra lefelé levő tömbnél kezdődnek, de azután valahol eléri a szimmetriatengelyt.



3.10. ábra. A döntő gondolat



3.11. ábra. A döntő
gondolat
kis módosítása

Mutassuk meg, hogy a (2) részhalmazban éppen annyi útvonal van, mint a (3)-ban. (A 3.10. ábra a két részhalmaz közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés döntő tényére utal.) Vezessük le ebből, hogy

$$N = \frac{|2j - n|}{n} \binom{n}{j}.$$

3.43. (Folytatás.) A csúctól az n -edik sorig vezető összes olyan legrövidebb zegzugos útvonalak száma, melyeknek a szimmetriatengellyel csak a kezdőpontjuk közös $\binom{2m}{m}$, ha $n = 2m$, azaz páros, és $2\binom{2m}{m}$, ha $n = 2m + 1$, azaz páratlan.

				0	1	0						
				0	1	1	1	0				
			0	1	2	3	2	1	0			
		0	1	3	6	7	6	3	1	0		
	0	1	4	10	16	19	16	10	4	1	0	
0	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1	0

3.12. ábra. Trinomiális együttthatók

3.44. Trinomiális együtthatók. A 3.12. ábra végtelen, háromszög alakban elrendezett számokból részletet mutat. Ezeket a számokat két feltétel határozza meg:

(1) *Határfeltétel.* Mindegyik vízszintes sor vagy „alap” (ezt a kifejezést hasonló értelemben használtuk a 3.6. pontban) 0,1-gyel kezdődik és 1,0-val végződik. (Az n -edik alap $2n + 3$ számból áll és így a határfeltétel az n -edik alap $2n - 1$ számát hagyja határozatlanul, ahol $n = 1, 2, 3, \dots$)

(2) *Rekurzív képlet.* Az $(n + 1)$ -edik alap minden olyan számát, amelyet az (1) feltétel határozatlanul hagy, számoljuk ki úgy, hogy összeadjuk az n -edik alap három számát: északnyugati, északi és északkeleti szomszédját. (Például $45 = 10 + 16 + 19$.)

Számítsuk ki a hetedik sor elemeit. (Ezek — három kivétellel — héttel oszthatók.)

3.45. (Folytatás.) Mutassuk meg, hogy az n -edik sor számai — az első és utolsó helyen álló nullától eltekintve — megegyeznek az $(1 + x + x^2)^n$ kifejezés x hatványai szerinti kifejtésének az együtthatóival. (Innen a „trinomiális együttható” elnevezés.)

3.46. (Folytatás.) Magyarázzuk meg a 3.12. ábrának a függőleges középvonalára vonatkozó szimmetriáját.

3.47. (Folytatás.) Figyeljük meg, hogy

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 1 &= 3 \\ 1 + 2 + 3 + 2 + 1 &= 9 \\ 1 + 3 + 6 + 7 + 6 + 3 + 1 &= 27 \end{aligned}$$

Általánosítsuk és bizonyítsuk.

3.48. (Folytatás.) Figyeljük meg, hogy

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 &= 1 \\ 1 - 2 + 3 - 2 + 1 &= 1 \\ 1 - 3 + 6 - 7 + 6 - 3 + 1 &= 1 \end{aligned}$$

Általánosítsuk és bizonyítsuk.

3.49. (Folytatás.) Figyeljük meg, hogy a következő összeg

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 19$$

trinomiális együttható; általánosítsuk és bizonyítsuk.

3.50. (Folytatás.) Keressünk a 3.12. ábrában olyan vonalakat, amelyek a Pascal-háromszög nevezetes vonalainak felelnek meg.

3.51. Leibniz harmonikus háromszöge. A 3.13. ábrán számok kevésbé ismert, de figyelemre méltó elrendezésének részletét láthatjuk. Ezeknek a számoknak olyan sajátságai vannak, amelyek — hogy úgy mondjuk — „ellentétesen analóg”-jai a Pascal-háromszög sajátságainak. Az a háromszög egész számokat tartalmaz, ez

pedig (amint látható) egész számok reciprokjait. A Pascal-háromszögben minden szám északnyugati és északkeleti szomszédjának összege. A Leibniz-háromszögben minden szám délnyugati és délkeleti szomszédjának összege; például

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}.$$

Ez a Leibniz-háromszög *rekurzív képlete*. Ennek a háromszögnek is van *határfeltétele*: az északnyugati határvonal menti számok (a 0. utcán) az egymás utáni egész számok reciprokjai, $1/1, 1/2, 1/3, \dots$ (A Pascal-háromszög határfeltétele más természetű: az egész határ, az egyik és a másik irányú 0-adik utca mentén ugyanazt a számértéket írja elő.) A határon megadott értékekből kiindulva, a Pascal-háromszögben a többi számot összeadással, a Leibniz-háromszögben viszont kivonással kapjuk. A 3.13. ábra csonka. A hiányokat a rekurzív képlet segítségével mindjárt ki is tölthetjük, például

$$1/4 - 1/20 = 1/5 \quad \text{és} \quad 1/7 - 1/8 = 1/56.$$

A határfeltételeket és a rekurzív képletet használva a 3.13. ábra táblázatát terjesszük ki a nyolcadik sorig bezárólag.

3.52. Pascal és Leibniz. Próbáljunk a két háromszög megfelelő számai között kapcsolatot felismerni, és ha felismertük, bebizonyítani.

				$\frac{1}{1}$				
					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
						$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$
							$\frac{1}{6}$	
					$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
							$\frac{1}{12}$	
					$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$
							$\frac{1}{30}$	
					$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$
							$\frac{1}{60}$	
					$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{7}$
							$\frac{1}{105}$	
					$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{8}$

3.13. ábra. Leibniz harmonikus háromszögének egy része

*3.53. Bizonyítsuk be, hogy⁹

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \dots$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \frac{1}{280} + \dots$$

(Keressük meg ezeket a számokat a harmonikus háromszögben.)

*3.54. Határozzuk meg az

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \dots$$

összeget és általánosítsuk. (Ismerünk analóg problémát?)

*3.55. Határozzuk meg a következő sorok összegét

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

.....

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots (r-1)r} + \frac{1}{2 \cdot 3 \dots r(r+1)} + \frac{1}{3 \cdot 4 \dots (r+1)(r+2)} + \dots$$

Negyedik rész

Ebből a részből néhány feladat a 3.61. példával, néhány pedig a 3.70. példáva kapcsolatos.

*3.56. *Hatványsorok.* π tizedes tört előállítására 3,14159... valóban „végtelen sor”

$$3 + 1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 + 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \dots$$

$\frac{1}{10}$ helyett x változót és az egymás utáni számjegyek

$$3, \quad 1, \quad 4, \quad 1, \quad 5, \quad 9, \dots$$

helyett rendre az

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5, \dots$$

⁹ Alkalmazkodva azokhoz az olvasókhoz, akiknek nem volt alkalmuk arra, hogy a végtelen sorokról (határérték, konvergencia...) pontos fogalmat alkossanak, ennek és hasonló problémáknak a megoldását a következő oldalakon adjuk meg, de nem megyünk bele a pontos részletekbe. A jobban felkészült olvasó pótolhatja ezeket a hiányokat (ez a legtöbb esetben könnyű).

együtthatókat téve, *hatványsort* kapunk:

$$(1) a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Nem térhetünk itt ki hatványsorok konvergenciájának és más ezzel összefüggő fontos kérdéseknek a tárgyalására, csak az ilyen sorokkal való formális műveletekkel akarunk megismerkedni (lásd a 3.53. példához fűzött lábjegyzetet). A fenti hatványsor c konstanssal szorzása ezt az eredményt adja:

$$ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 + ca_3x^3 + \dots$$

A fenti (1) és a

$$(2) b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

hatványsorok összege:

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + \dots$$

és a két hatványsor, (1) és (2), szorzata:

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots$$

Két hatványsorunk, (1) és (2), akkor és csak akkor azonos, ha

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \dots, \quad a_n = b_n, \quad \dots$$

Minden polinomot olyan hatványsornak gondolhatunk, amelyikben végtelen sok együttható, tulajdonképp valamelyik együttható után az összes többi, eltűnik. Például a $3x - x^3$ polinomot (1) hatványsorunk speciális eseteként tárgyalhatjuk, amelyikben

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -1 \quad \text{és} \quad a_n = 0, \quad \text{ha} \quad n \geq 4.$$

Győződjünk meg magunk is, hogy az előző szabályok polinomokra is érvényesek.

***3.57.** Számítsuk ki a következő szorzatot

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots)$$

***3.58.** Határozzuk meg a következő szorzatban x^n együtthatóját:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots)(1 + x + x^2 + \dots + x^n \dots)$$

***3.59.** A 3.57. példa megoldásának hízaga a következő sorok vizsgálatára vezet:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots$$

$$1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \dots$$

Ismerjük-e ezek közül a sorok közül legalább valamelyiknek az összegét? Meg tudnánk-e határozni a többiét?

***3.60.** Bizonyítsuk a 3.37. példa eredményét másként is.

***3.61.** A *binomiális tétel tört és negatív kitevőkre*. Newton a „Royal Society” titkárságához intézett, 1676. október 24-én kelt levelében megírta, hogyan fedezte fel

az (általános) binomiális tételt; ez a levél válasz volt Leibniznek, aki módszeréről kívánt tájékoztatást.¹⁰

Newton bizonyos görbék alatti területeket vizsgált; erősen hatottak rá Wallisnak az interpolációra vonatkozó gondolatai és végül a következő sejtésre jutott:

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

sorba fejtés az a kitevőnek nemcsak pozitív egész értékeire érvényes, hanem tört és negatív értékeire is, sőt egészen általánosan, a bármely számértékére is.¹¹

Newton a fentiekre formális bizonyítást nem közölt, inkább csak példákra és analógiákra támaszkodott. A kérdést — mondhatnánk — úgy kezelte, mint egy fizikus, „kísérletezve” vagy „induktíven”. Hogy megértsük az ő szempontját, próbáljunk megtenni néhány olyan természetű lépést, mint amilyenek meggyőzték sejtése helyességéről. Rövidség kedvéért sejtését „N-sejtésnek” fogjuk nevezni.

Ha a nem negatív egész szám, akkor a jobb oldalon felírt sorban x^{a+1} együtt-hatója és mindegyik ezt követő együtttható eltűnik, a sor véges lesz (hála a szám-lálóban fellépő 0 tényezőnek). Viszont ha a értéke nem a 0, 1, 2, 3, ... sorozatból való, akkor a sor nem végződik be, hanem végtelen sok tagból áll. Például $a = \frac{1}{2}$ -re

vizsgálva a kiterjesztést, az derül ki, hogy

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots\end{aligned}$$

Úgy látszik, hogy Newtont nem zavarta az el nem tűnő tagok végtelensége. A hat-ványsorok és tizedes törtek közti analógiát jól ismerte, és máshol említette is; lásd a 3.56. példát. Vannak olyan számok, amelyeknek tizedes tört alakja végezzámú számjegyből áll (mint például $\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{5}$), és vannak olyanok, amelyeknek tizedes tört alakja végtelen sok számjegyből áll (mint például $\frac{1}{3}$ vagy $\frac{7}{11}$).

Érvényes a fenti sorfejtés $(1+x)^{1/2}$ -re? Newton a kérdést a sor önmagával való szorzásával vizsgálta meg; az eredmény *szükségszerűen*

$$(1+x)^{1/2}(1+x)^{1/2} = 1+x.$$

Ellenőrzésül számítsuk ki a szorzatsorban x , x^2 , x^3 és x^4 együttthatóját (lásd a 3.56. példát).

¹⁰ Lásd J. R. Newman: *The World of Mathematics* I. kötet 519–524. old.

¹¹ Ma már tudjuk, hogy x -re vonatkozólag némi korlátozás szükséges, de itt — Newton álláspontjával megegyezően — ezt nem vesszük, figyelembe. (Az ő idejében sorok konvergenciáját még nem definiálták világosan.) Eljárásunk egyezik a 9. lábjegyzet álláspontjával is.

*3.62. Számítsuk ki az

$$1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} + \dots$$

sor négyzetében az x , x^2 , x^3 és x^4 együtthatóit. A fenti sor $(1+x)^{1/3}$ N-sejtésnek megfelelő sorba fejtése. Az eredmény $(1+x)^{2/3}$ -nak ugyanezen sejtés szerinti sorba fejtésnek kellene lennie. Ellenőrizzük ezt!

*3.63. (Folytatás.) Számoljuk ki az adott sor köbében az x , x^2 , x^3 és x^4 együtthatóit. Mondjuk meg előre az eredményt, majd ellenőrizzük.

*3.64. Az N-sejtés szerint fejtsük sorba $(1+x)^{-1}$ -t. Van-e valami megjegyzésünk?

3.65. Az értelmezési tartomány kiterjesztése. A 3.6. pontban értelmeztük nem negatív egész n -ekre és a $j \leq n$ egyenlőtlenségnek eleget tevő nem negatív egész j -kre az $\binom{n}{j}$ szimbólumot. Terjesszük ki most n értelmezési tartományát (de a j -t nem, lásd a 3.11. példát): legyen

$$\binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{j} = \frac{x(x-1)(x-2) \dots (x-j+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots j}$$

$j = 1, 2, 3, \dots$ -ra és tetszőleges x számra. Ez a definíció magában foglalja azt, hogy

(I) $\binom{x}{j}$ az x -nek j -ed fokú polinomja, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ -ra.

$$(II) \quad \binom{x}{j} = (-1)^j \binom{j-1-x}{j}$$

(III) Ha n és j nem negatív egész számok és $j > n$, $\binom{n}{j} = 0$.

(IV) Az N-sejtést a következő alakban írhatjuk:

$$(1+x)^a = \binom{a}{0} + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \dots + \binom{a}{n}x^n + \dots$$

(I), (III) és (IV) nyilvánvalóak; (II)-t bizonyítsuk be.

*3.66. Általánosítsuk a 3.64. példát: vizsgáljuk meg, vajon egyezik-e a 3.59. példa teljes eredménye az N-sejtéssel.

*3.67. Alkalmazzuk még egyszer azt a fogást, amelyet már háromszor használtunk (3.9. pont, 3.36. és 3.60. példák): N-sejtést feltételezve, számítsuk ki két különböző úton x^r együtthatóját

$$(1+x)^a(1+x)^b = (1+x)^{a+b}$$

sorfejtésekben.

*3.68. Latolgassuk a 3.67. példa eredményét. Bebizonyítottuk? Ha nem az egészet, legalább egy részét? Van-e más eljárás is? Ha bizonyítottnak vesszük, bebizonyíthatjuk-e akkor az N-sejtést is? Vagy legalább az N-sejtés egy részét?

*3.69. Próbáljuk meg az alábbi sorfejtés együtthatóit felismerni:

$$(1-4x)^{-1/2} = 1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + \dots$$

Fejezzük ki az általános tagot valamilyen szokásos alakban (mely világossá teszi azt a tényt, hogy az együtthatók egész számok),

***3.70. Határozatlan együtthatók módszere.** Fejtsük hatványsorba két megadott hatványsor hányadosát.

Az x változó hatványai szerint sorba kell fejtenünk a

$$\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots}$$

törtet, ahol $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$ együtthatók adott számok; feltételezzük, hogy $a_0 \neq 0$. (Ez a feltétel, melyet a feladat első rövid vázolásánál nem említettünk, lényeges.)

Azt akarjuk, hogy az adott tört a következő alakot vegye fel:

$$\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots} = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots$$

Az $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ együtthatókat még nem határoztuk ugyan meg, amikor bevezettük őket (innen a módszer neve, melyet éppen alkalmazni készülünk), de reméljük, hogy meghatározásunk végül majd sikerül; hiszen pontosan ez a feladatunk. Ismeretlenjeink az u_0, u_1, u_2, \dots együtthatók (amint látjuk, az ismeretlenek száma végtelen).

A három hatványsor (kettő adott, egyet meg kell keresnünk) közti kapcsolatot a következő alakban írjuk le újra:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots,$$

és most már otthonosan érezzük magunkat (3.56. példa): a két oldalon x ugyanolyan hatványainak együtthatóit egyenlővé téve, egyenletrendszert nyerünk.

$$a_0u_0 = b_0$$

$$a_1u_0 + a_0u_1 = b_1$$

$$a_2u_0 + a_1u_1 + a_0u_2 = b_2$$

$$a_3u_0 + a_2u_1 + a_1u_2 + a_0u_3 = b_3$$

.....

Ez az egyenletrendszer ismerős típusú: rekurzív, vagyis rekurzióval oldható meg. Az első ismeretlent, u_0 -t az első egyenletből nyerjük, majd u_0, u_1, \dots, u_{n-2} és u_{n-1} meghatározása után a következő ismeretlent, u_n -t, a következő, előzően még fel nem használt egyenletből kapjuk.

Fejezzük ki u_0, u_1, u_2 és u_3 -t az $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2$ és b_3 -mal.

(Előnyös ennek a megoldásnak a menetét típusként kezelünk. Jegyezzük meg a jellegzetes lépéseket:

az ismeretleneket egy hatványsor együtthatóiként vezetjük be;

egyenletrendszert vezetünk le abból, hogy a hatványsorok közti összefüggés alapján a két oldalon az ismeretlen ugyanolyan kitevőjű hatványának együtthatóit összehasonlítjuk;

az ismeretleneket rekurzíven számítjuk ki.

Ezek a „határozatlan együtthatók” megoldástípusának vagy módszerének jellemző lépései, amely rekurzióval megoldható néhány igen nevezetes és igen hasznos egyenletrendszert ad.)

*3.71. Tekintsük a következő hatványszorzatot:

$$a_i^{\alpha_i} a_j^{\alpha_j} a_k^{\alpha_k} b_l^{\beta_l} b_m^{\beta_m}.$$

Definíciók:

$$\begin{array}{ll} \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k + \beta_l + \beta_m & \text{fokszám,} \\ \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k & \text{fokszám } a\text{-kban,} \\ \beta_l + \beta_m & \text{fokszám } b\text{-kben,} \\ i\alpha_i + j\alpha_j + k\alpha_k + l\beta_l + m\beta_m & \text{súly.} \end{array}$$

Természetesen, a fenti definíciókat akárhány a -ra és b -re alkalmazhatjuk, nemcsak háromra az egyik és kettőre a másik fajtából.

A 3.70. példára adott válaszban figyeljük meg u_0 , u_1 , u_2 és u_3 kifejezését, és magyarázzuk meg a megfigyelt szabályosságokat.

*3.72. Fejtsük ki a következő törtet:

$$\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots}{1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots}$$

(Az eredmény egyszerű; hasznát vehetnénk-e?)

*3.73. Fejtsük ki a következő törtet:

$$\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots}{1 - x}$$

(Az eredmény egyszerű; hasznát vehetnénk-e?)

*3.74. Fejtsük ki a következő törtet:

$$\frac{1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{15} + \frac{x^3}{105} + \dots + \frac{x^n}{3 \cdot 4 \cdot 7 \dots (2n+1)} + \dots}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{48} + \dots + \frac{x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} + \dots}$$

(Számítsunk ki néhány tagot, és próbáljuk kitalálni az általános tagot.)

*3.75. *Hatványsor inverziója.* Adott egy függvény hatványsora, határozzuk meg az inverz függvényét.

Más szavakkal: adott x kifejezése y hatványaival, fejtsük ki y -t x hatványai szerint. Pontosabban: adott

$$x = a_1y + a_2y^2 + \dots + a_ny^n + \dots,$$

feltételezzük, hogy $a_1 \neq 0$, és meg kell határoznunk a következő kifejezést:

$$y = u_1x + u_2x^2 + \dots + u_nx^n + \dots$$

A 3.70. példa típusát követjük. x -nek y hatványai szerint haladó kifejtésében y helyébe a (kívánt) hatványsorát helyettesítjük:

$$\begin{aligned}
 x = & a_1(u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \dots) \\
 & + a_2(u_1^2x^2 + 2u_1u_2x^3 + \dots) \\
 & + a_3(u_1^3x^3 + \dots) \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

A reláció két oldalán x ugyanazon kitevőjű hatványának együtthatóit egyenlővé téve, u_1, u_2, u_3, \dots -ra egyenletrendszert nyerünk:

$$\begin{aligned}
 1 &= a_1u_1 \\
 0 &= a_1u_2 + a_2u_1^2 \\
 0 &= a_1u_3 + 2a_2u_1u_2 + a_3u_1^3 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

és ez rekurzív (ha nem is lineáris).

Fejezzük ki u_1, u_2, u_3, u_4 és u_5 -öt a_1, a_2, a_3, a_4 és a_5 -tel.

***3.76.** A 3.75. példában adott válaszban vizsgáljuk meg a kifejezések fokát és súlyát.

***3.77.** Adott

$$x = y + y^2 + y^3 + \dots + y^n + \dots,$$

fejezzük ki y -t x hatványaival.

(Az eredmény egyszerű; hasznát vehetnénk-e?)

***3.78.** Adott

$$4x = 2y - 3y^2 + 4y^3 - 5y^4 + \dots,$$

fejezzük ki y -t x hatványaival. (Próbáljuk kitalálni az általános tag alakját, és azt kitalálva, próbáljuk megmagyarázni.)

***3.79.** Adott

$$x = y + ay^2,$$

fejtsük ki y -t x hatványai szerint. (Az eredményt felhasználhatjuk arra, hogy a 3.75. példában tárgyalt általános eset egy részét világossá tegyük.)

***3.80.** Adott

$$x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \dots + \frac{y^n}{n!} + \dots,$$

fejtsük ki y -t x hatványai szerint.

***3.81.** *Differenciálegyenletek.* Fejtsük ki y függvényét x hatványai, szerint úgy, hogy kielégítse a

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

differenciálegyenletet és az

$$y = 1, \quad \text{ha} \quad x = 0$$

kezdő feltételt.

A 3.70. példa típusát követve, legyen

$$y = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \dots$$

u_0, u_1, u_2, \dots együtthatókat kell meghatározunk. A differenciálegyenlet azt kívánja, hogy fennálljon

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2x + 3u_3x^2 + 4u_4x^3 + \dots \\ = u_0^2 + 2u_0u_1x + (2u_0u_2 + u_1^2 + 1)x^2 + \dots \end{aligned}$$

A reláció két oldalán ugyanazon kitevőjű hatványok együtthatóit összehasonlítva, egyenletrendszert nyerünk:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0^2 \\ 2u_2 &= 2u_0u_1 \\ 3u_3 &= 2u_0u_2 + u_1^2 + 1 \\ 4u_4 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Ebből az egyenletrendszerből rekurzívan meghatározhatjuk u_1, u_2, u_3, \dots -t, mivel a kezdő feltétel azt jelenti, hogy

$$u_0 = 1.$$

Számítsuk ki u_1, u_2, u_3 és u_4 számértékét.

(A differenciálegyenletek megoldása határozatlan együtthatók módszerével, amelyet feladatunk példáz, nagy elméleti és gyakorlati jelentőségű.)

*3.82. (Folytatás.) Mutassuk meg, hogy $u_n > 1$, ha $n \geq 3$.

*3.83. Fejtsük x hatványai szerint haladó sorba az y függvényt úgy, hogy kielégítse a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

differenciálegyenletet és az

$$y = 1, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{ha } x = 0$$

kezdő feltételeket.

*3.84. Határozzuk meg x^{100} együtthatóját a következő függvény hatványsorba fejtésében:

$$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{25})^{-1}(1-x^{50})^{-1}.$$

Eléggé nyilvánvaló, hogy ha meg akarjuk oldani a felvetett problémát, általánosítanunk kell. Utat-módot kell keresnünk, hogy kiszámítsuk ebben a kifejezésben az általános együtthatót (x^n -ét). Érdemes megvizsgálni olyan könnyebb, analóg problémákat is, amelyek a felvetett problémából adódnak. Ilyenféle gondolatok alapján végül az az ötletünk támadhat, hogy több hatványsort vezetünk be, „határozatlan együtthatókkal”:

$$(1-x)^{-1} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \dots,$$

$$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1} = B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + \dots$$

$$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1} = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots,$$

$$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{25})^{-1} = D_0 + D_1x + \dots,$$

és végül

$$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{25})^{-1}(1-x^{50})^{-1} = \\ = E_0 + E_1x + E_2x^2 + \dots + E_nx^n + \dots$$

Ezzel a jelöléssel problémánk: E_{100} meghatározása. Az eredeti egyetlen ismeretlen (E_{100}) helyett végtelen sok ismeretlent vezetünk be: meg kell határoznunk A_n , B_n , C_n , D_n és E_n -et, ha $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Viszont ezek közül néhány ismert vagy nyilvánvaló.

$$A_0 = A_1 = A_2 = \dots = A_n = \dots = 1,$$

$$B_0 = C_0 = D_0 = E_0 = 1.$$

Még hozzá a bevezetett ismeretlenek nem is függetlenek:

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots = (B_0B_1x + B_2x^2 + \dots)(1-x^5),$$

amiből x^n együtthatóját vizsgálva adódik, hogy

$$A_n = B_n - B_{n-5}.$$

Keressünk analóg összefüggéseket és olyan közbeeső lépéseket, amelyek a már ismert értékek és E_{100} között kapcsolatot teremtenek. Így végül megkapjuk E_{100} számértékét.

***3.85.** Határozzuk meg az $y = x^{-1} \ln x$ függvény n -edik deriváltját, $y^{(n)}$ -t.

Differenciálással és algebrai átalakítással közvetlenül adódik:

$$y' = -x^{-2} \ln x + x^{-2},$$

$$y'' = 2x^{-3} \ln x - 3x^{-3},$$

$$y''' = -6x^{-4} \ln x + 11x^{-4};$$

ezekből (vagy talán még néhány ilyen esetből) kitalálhatjuk, hogy a keresett n -edik derivált alakja:

$$y^{(n)} = (-1)^n n! x^{-n-1} \ln x + (-1)^{n-1} c_n x^{-n-1},$$

ahol c_n az n -től függő (de x -től független) egész szám. Bizonyítsuk be ezt, és fejezzük ki c_n -et n -nel.

3.86. Fejezzük ki rövidebben:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}.$$

(Ismerünk-e valami hasonló problémát? Felhasználhatjuk-e annak az eredményét – vagy talán a megoldás módszerét?)

3.87. Fejezzük ki rövidebben:

$$1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1}.$$

(Ismerünk-e valami hasonló problémát? Felhasználhatjuk-e annak az eredményét – vagy a megoldás módszerét?)

3.88. (Folytatás.) Általánosítsunk.

3.89. Legyen

$$a_{n+1} = a_n \frac{n + \alpha}{n + 1 + \beta},$$

ahol $n = 1, 2, 3, \dots$ és $\alpha \neq \beta$. Mutassuk meg, hogy

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_n(n + \alpha) - a_1 + \beta}{\alpha - \beta}.$$

3.90. Összegezzük

$$\frac{p}{q} + \frac{p}{q} \frac{p+1}{q+1} + \frac{p}{q} \frac{p+1}{q+1} \frac{p+2}{q+2} + \dots + \frac{p}{q} \frac{p+1}{q+1} \frac{p+2}{q+2} \dots \frac{p+n-1}{q+n-1}.$$

3.91. *A π számról.* Tekintsük az egységsugarú kört, írjunk köré és belé egy-egy n -oldalú szabályos sokszöget. Jelöljük K_n -nel a körül írt, B_n -nel a beírt poligon kerületét.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\frac{a+b}{2} = S(a, b), \quad \sqrt{ab} = M(a, b), \quad \frac{2ab}{a+b} = H(a, b)$$

(számtani, mértani és harmonikus közép).

(1) Határozzuk meg K_4 , B_4 , K_6 , B_6 -ot.

(2) Mutassuk meg, hogy

$$K_{2n} = H(K_n, B_n), \quad B_{2n} = M(B_n, K_{2n}).$$

Ennek alapján K_6 -tal, B_6 -tal kezdve *rekurzív úton* kiszámíthatjuk a

$$K_6, B_6; \quad K_{12}, B_{12}; \quad K_{24}, B_{24}; \quad K_{48}, B_{48}; \dots$$

számsorozatot addig, ameddig csak akarjuk, és így π -t két olyan számérték közé zárjuk, amelyek különbsége tetszőlegesen kicsiny. Archimedes a számításban a sorozat tizedik számáig, vagyis a 96 oldalú szabályos sokszögekig jutott, és azt találta, hogy

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$$

(Lásd *Archimedes Műveinek* T. L. Heath (Dover) szerkesztette kiadásában a 91–98. oldalon.)

3.92. *További példák!* Találjunk ki néhány feladatot, amelyek az ebben a fejezetben vizsgáltakhoz hasonlóak, de tőlük mégis különböznek — lehetőleg olyanokat, amelyeket meg is tudunk oldani.

4. FEJEZET

SZUPERPOZÍCIÓ

4.1 Interpoláció

Több lépésre van szükségünk ahhoz, hogy eljussunk a következő probléma végleges megfogalmazásához.

(1) Adott n különböző abszcissza:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n,$$

és a megfelelő n ordináta:

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n;$$

tehát n különböző pontunk van:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n).$$

Olyan $f(x)$ függvényt kell meghatároznunk, amely az adott abszcisszákon a megfelelő ordinátaértékeket veszi fel:

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad f(x_3) = y_3, \quad \dots, \quad f(x_n) = y_n.$$

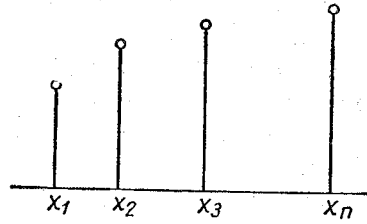
Más szóval azt az $y = f(x)$ függvénnyel meghatározott görbét keressük, amely átmegy az adott n ponton; lásd a 4.1. ábrát. Ez az *interpoláció* problémája. Vizsgáljuk meg a háttérét; ez fokozhatja érdeklődésünket és így a megoldás esélyeit is.

(2) Interpolációs probléma mindannyiszor felmerülhet, ahányszor csak valamilyen más mennyiségtől (x -től) függő y mennyiségről van szó. Vegyük a következő konkrétabb esetet: legyen x a hőmérséklet, y pedig állandó nyomás alatt álló, homogén rúd hossza. Minden x hőmérsékletnek a rúd bizonyos y hossza felel meg; ezt fejezzük ki úgy, hogy y függ az x -től, vagy y függvénye az x -nek, és úgy írhatjuk, hogy $y = f(x)$. Amikor a fizikus kísérleti úton vizsgálja y -nak x -től való függését, akkor különböző

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

hőmérsékleteken megméri a rúd hosszát, és rendre az

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$



4.1. ábra. Interpoláció

értékeket kapja. Természetesen a fizikus szeretné olyan hőmérsékleteken is ismerni az y hosszúságot, amelyeket nem volt alkalma megfigyelni. Más szóval a fizikus n megfigyelés alapján ismerni szeretné az $y = f(x)$ függvényt teljesen, az x független változó egész értelmezési tartományán. Ezzel felveti az interpoláció problémáját.

(3) Hadd jegyezzük meg zárójelben, hogy a fizikus problémája valójában még ennél is bonyolultabb. Az ő értékei $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ a megmért mennyiségeknek még csak nem is az „igazi értékei”, hanem elkerülhetetlen mérési hibák vannak bennük. Ezért a görbe nem is az adott pontokon *keresztül*, hanem csak a *közelükben* halad.

Két esetet szokás megkülönböztetni: az eddig meg nem figyelt x abszcissza, amelyhez a megfelelő y ordinátát keresi a fizikus, fekkhet a megfigyelt szélső értékek (a 4.1. ábrán x_1 és x_n) *közi* intervallumban vagy ezen az intervallumon *kívül*. Az első esetben *interpolációról*, a másodikban *extrapolációról* szokás beszélni. (Az interpolációt általában megbízhatóbbnak tartják, mint az extrapolációt.)

De tekintsünk most el ettől a megkülönböztetéstől és ennek az alponthoz többi megjegyzéseitől is; zárjuk be a zárójelet és térjünk vissza az (1) és (2) alpontok álláspontjához.

(4) Az (1) pontban felvetett probléma nagyon is határozatlan: görbék ki-meríthetetlen sokasága halad át az n adott ponton. A fizikust n számú megfigyelése magában véve még nem jogosítja fel arra, hogy ezek közül a görbék közül valamelyiket előnyben részesítse a többivel szemben. Ha a fizikus választ és megrajzol egy bizonyos görbét, akkor erre az n megfigyelésen *kívül* más okának is kell lennie. Mi ez az ok?

Így veti fel az interpoláció problémája ezt az általános kérdést is (és ez nagyban növeli érdekességét): mi indít, vagy mi jogosít fel minket arra, hogy adott megfigyelésekből és adott elméleti háttér alapján egy bizonyos matematikai megfogalmazáshoz jussunk? Ez nehéz filozófiai kérdés, és minthogy általában meglehetősen valószínűtlen, hogy nehéz filozófiai kérdésekre kielégítő választ tudjunk adni, nézzük most az interpoláció problémájának másik oldalát.

(5) Természetes volna, az (1) alpontban felvetett problémát úgy megoldani, hogy az n ponton átmenő *legegyszerűbb* görbét keressük. Ez a módosítás azonban határozatlanná teszi a problémát, sőt bizonytalanná, minthogy az „egyszerűség” nem objektív tulajdonság. Az egyszerűséget egyéni ízlésünknek, álláspontunknak, körülményeinknek vagy értelmi beállítottságunknak megfelelően ítéljük meg.

A mi problémánkban mégis adhatunk az „egyszerű” fogalomnak olyan értelmezést, amely elfogadhatónak látszik és egyben jól meghatározott, s amellet hasznos megfogalmazáshoz vezet. Először is az összeadást, a kivonást és a szorzást vegyük a legegyszerűbb számolási műveleteknek. Azután tekintsük azokat a függvényeket a legegyszerűbbeknek, amelyeknek értékeit a legegyszerűbb számolási műveletekkel lehet kiszámítani. Ha ezt a két szempontot elfogadjuk, akkor a polinomokat tekintjük a legegyszerűbb függvényeknek; alakjuk:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Tetszőleges helyettesítési értéküket a három legegyszerűbb művelettel lehet kiszámítani, a számszerűen megadott a_0, a_1, \dots, a_n együtthatókból és az x független változó megfelelő értékéből. Ha feltesszük, hogy $a_n \neq 0$, akkor a polinom foka n .

Végül: két adott, különböző fokszámú polinom közül vegyük egyszerűbbnek az alacsonyabb fokút. Ha még ezt a szempontot is elfogadjuk, akkor az a feladat, hogy n ponton át a legegyszerűbb görbét fektessük, határozottá válik, és így a *polinommal való interpoláció* problémájának ehhez a megfogalmazásához jutunk el:

Adott n különböző szám (x_1, x_2, \dots, x_n) és n további szám (y_1, y_2, \dots, y_n) , határozzuk meg azt a lehető legalacsonyabb fokú polinomot, $f(x)$ -et, amely kielégíti az

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad \dots, \quad f(x_n) = y_n$$

n számú feltételt.

4.2. Speciális helyzet

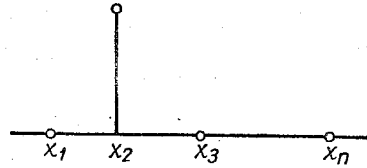
Ha nem látunk más utat feladatunk megoldására, megpróbáljuk *módosítani az adatokat*. Például rögzítsük valamelyik megadott ordinátánkat és változtassuk meg a többit. Így könnyebben kezelhető speciális helyzethez juthatunk. Az adott abszcisszákhöz nem kell nyúlnunk,

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

jelenthetnek bármely n különböző számot, de egészen egyszerű, speciális ordinátákat választunk:

$$0, 1, 0, \dots, 0.$$

4.2. ábra. Speciális helyzet



(Minden adott ordináta eltűnik, csak az az egy nem, amelyik az x_2 abszcisszá-nak felel meg; lásd a 4.2. ábrát.)

Most már van idevágó tárgyi tudásunk is: az a polinom, amely ezeket az értékeket veszi fel, eltűnik $n - 1$ adott pontban, van $n - 1$ különböző zéró-helye ($x_1, x_3, x_4, \dots, x_n$), és ezért osztható az alábbi tényezőkkel:

$$x - x_1, x - x_3, x - x_4, \dots, x - x_n.$$

Osztható tehát az $n - 1$ tényező szorzatával is, ezért legalább $n - 1$ -ed fokú. Ha ezt a lehető legalacsonyabb fokszámot éri el, akkor alakja

$$f(x) = C(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n),$$

ahol C valamilyen konstans.

Felhasználtuk-e az összes adatot? Hátra van még az x_2 abszcisszájának megfelelő ordináta:

$$f(x_2) = C(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n) = 1.$$

Ebből az egyenletből kiszámítjuk C -t, a kiszámított értéket $f(x)$ kifejezésébe helyettesítjük, és így azt találjuk, hogy

$$f(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n)}.$$

Nyilvánvaló, hogy ez az $f(x)$ polinom minden megadott abszcisszájánál az előírt értéket veszi fel.

4.3. Az általános eset

Szerencsénk volt, hogy ilyen könnyebben kezelhető speciális esetre bukkan-tunk. Érdemeljük meg szerencsénket azzal, hogy a talált eredményből minél nagyobb hasznot húzunk.

Eddigi eredményünket csekély módosítással kissé átfogóbb speciális esetre is alkalmazhatjuk. Az adott

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

abszcisszákhöz rendeljük a következő ordinátákat:

$$0, y_2, 0, \dots, 0.$$

Azt a polinomot, amely ezeket az értékeket veszi fel, a 4.2. pontban nyert kifejezésből mindössze egy tényezővel való szorzás útján kapjuk; nyilvánvaló, hogy az eredmény:

$$y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\dots(x_2-x_n)}.$$

Ebben a kifejezésben az x_2 abszcissza speciális szerepet játszik, mást, mint a többi, amelyeknek egyforma szerep jut. Pedig x_2 nincs kitüntetve: bármely másik abszcisszának adhatnánk ezt a speciális szerepet. És így, ha az

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

abszcisszákhöz a következő n sor bármelyik sorából rendeljük hozzá a megfelelő értékeket:

$$y_1, 0, 0, \dots, 0$$

$$0, y_2, 0, \dots, 0$$

$$0, 0, y_3, \dots, 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$0, 0, 0, \dots, y_n$$

mindig felírhatunk egy olyan $n-1$ -ed fokú polinomot, amely a megfelelő abszcisszákon az abban a sorban előírt értékeket veszi fel.

Felváltottuk problémánk n különböző speciális esetének a megoldását. Összeállíthatjuk-e ezeket úgy, hogy kombinációjukból az általános eset megoldásához jussunk? Igen, mégpedig úgy, hogy a kapott n kifejezést összeadjuk:

$$\begin{aligned} f(x) = & y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\dots(x_1-x_n)} \\ & + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\dots(x_2-x_n)} \\ & + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\dots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\dots(x_3-x_n)} \\ & \dots\dots\dots \\ & + y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\dots(x_n-x_{n-1})}. \end{aligned}$$

Ez a polinom legfeljebb $(n-1)$ -ed fokú, és eleget tesz a következő feltételeknek:

$$f(x_i) = y_i, \quad \text{ha } i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

amint azt egy pillanat alatt beláthatjuk, ha a kifejezés szerkezetét meggondoljuk.

(Maradt-e még tisztázatlan kérdés?)

4.4. A megoldástípus

Az interpoláció problémájának fenti — Lagrange-tól származó — megoldása rendkívül szuggesztív általános tervre vezet. *Láttunk-e ilyet már előbb is?*

(1) Az olvasó valószínűleg ráismer — és az előbbiek bizonyára emlékeztet — is — a síkmértan egyik jól ismert tételének szokásos bizonyítására: „A körben a középpontnál fekvő szög kétszerese a kerületi szögnek, ha a szögeknek ugyanaz az alapjuk, vagyis ugyanazon a köríven vannak.” (A körívet kettős vonal emeli ki a 4.3. és 4.4. ábrán.) A bizonyítás két megjegyzésen alapul, és két lépésben végezzük el: vö. Euklidesz, III. könyv 20.

(2) Van egy könnyebben kezelhető *speciális helyzet*: ha a kerületi szög egyik szára átmérő, akkor az α középponti szög (lásd a 4.3. ábrát) nyilvánvalóan egy egyenlő szárú háromszög két szögének az összege. Ez a két szög egymással egyenlő, és közülük az egyik éppen a β kerületi szög. Ezzel a 4.3. ábrán látható speciális helyzetre be is bizonyítottuk az

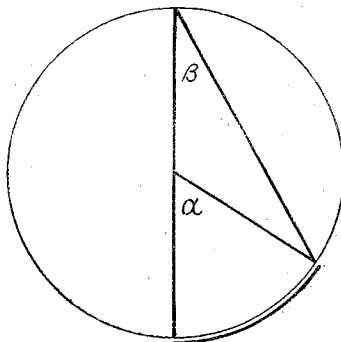
$$\alpha = 2\beta$$

egyenlőséget.

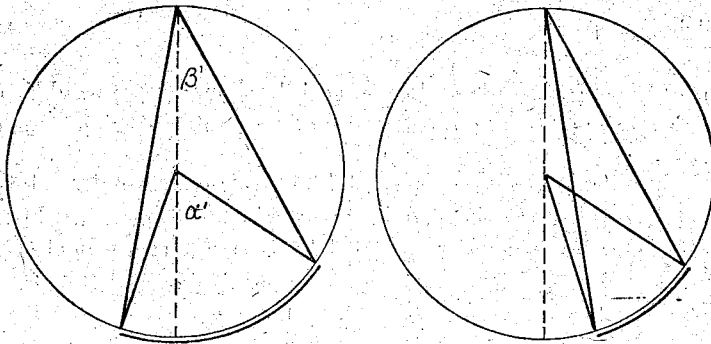
(3) Most már nem a 4.3. ábra speciális helyzete van előttünk. De egy átmérőt akkor is húzhatunk (szaggatott vonal a 4.4. ábrán) a kerületi szög csúcsán át. Így az előbbi helyzet az ábrán kétszer is előfordul. Az

$$\alpha' = 2\beta', \quad \alpha'' = 2\beta''$$

egyenlőségek ilyen speciális helyzetekre vonatkoznak (lásd a 4.3. ábrát). Egyenlőségeinket most is a (2) pontban leírt megfontolások igazolják. Ezekből — aszerint, hogy a 4.4. ábrán feltüntetett egyik vagy másik esetről van szó — összeadással vagy kivonással kapjuk azt az α , illetve β középponti,



4.3. ábra. Speciális helyzet



4.4. ábra. Az általános eset

illetve kerületi szöget, amelyre tételünk vonatkozik:

$$\alpha = \alpha' + \alpha'', \quad \beta = \beta' + \beta'' \quad \text{vagy} \quad \alpha = \alpha' - \alpha'', \quad \beta = \beta' - \beta'';$$

összeadva, illetőleg kivonva a már igazolt két egyenlőséget

$$\alpha' + \alpha'' = 2(\beta' + \beta''), \quad \alpha' - \alpha'' = 2(\beta' - \beta'')$$

és így az

$$\alpha = 2\beta.$$

tétel teljes általánosságban be van bizonyítva.

(4) Most pedig hasonlítsuk össze az ebben a fejezetben vizsgált két problémát: a meghatározó problémát az algebrából, a bizonyító problémát a sík-mértanból vettük. Ezeket a 4.1., 4.2. és 4.3. pontban, illetve ebben a pontban az (1), (2) és (3) alpontban tárgyaltuk. Bár több szempontból különböznek, megoldásaik közös vonásokat, egyező *típust* mutatnak. Mindkét példában két lépésben értük el a végeredményt.

Először elég szerencsések voltunk, mert észrevettünk egy különösen könnyen kezelhető esetet, bizonyos *speciális helyzetet*, és jól rászabott, de csak arra az esetre alkalmazható megoldást találtunk; lásd a 4.2. pontot és a 4.4.(2) alpontot; a 4.2. és a 4.3. ábrát.

Majd *több ilyen speciális esetet kombinálva* (a speciális megoldás ezekre alkalmazható volt), sikerült minden korlátozástól mentes megoldáshoz jutni, és ez már az *általános esetre* is alkalmazható; lásd a 4.3. pontot és a 4.4.(3) alpontot.

Vezessünk most be két kifejezést, amelyek majd kiemelik a megoldástípus bizonyos vonásait.

Az első lépésben olyan *speciális helyzetről* (speciális esetről) volt szó, amely nemcsak különlegesen jól kezelhető, de különlegesen hasznos is: legáltalában *célravezető speciális helyzetnek* (speciális esetnek) nevezhetjük, mert az vezetett az általános megoldás útjára.¹

¹ MPR 1. kötet, 24. old. 7., 8., 9. példa.

A második lépés meghatározott algebrai műveletekkel kapcsolja össze a speciális eseteket. A 4.3. pontban n speciális megoldást adott konstansokkal szoroztunk és adtunk össze, hogy megkapjuk az általános megoldást. A (3) al-pontban a speciális helyzetre vonatkozó egyenlőségeket adtuk össze és vontuk ki, hogy az általános bizonyítást megkapjuk. Nevezzük *lineáris kombinációnak* vagy *szuperpozíciónak* a 4.3. pontban alkalmazott algebrai műveleteket [ez általánosabb, mint a (3) alpontbeli; erről majd többet a 4.11. példában].

A bevezetett kifejezéseket használjuk fel megoldástípusunk körvonalázására: *Ha célravezető speciális helyzetből indulunk ki, a speciális esetek szuperpozíciójával eljutunk az általános megoldáshoz.*

További megjegyzések és példák feldolgozása után az olvasó majd maga is megfogalmazhatja a vázoltakat. El is szakadhat ettől a vázlatról, és kibővítheti a megoldástípus alkalmazási területét.

Példák és megjegyzések a 4. fejezethez

Első rész

4.1. A gúla térfogata $Th/3$ (T az alapterület, h a magasság). E kifejezés bizonyításában a tetraéder (háromszög alapú gúla) esetét tekintsük célravezető speciális esetnek, és alkalmazzunk szuperpozíciót. Hogyan?

4.2. Ha $f(x)$ k -ad fokú polinom, akkor van olyan $k+1$ -ed fokú $F(x)$ polinom, amelyre

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = F(n),$$

ha $n = 1, 2, 3, \dots$

A tétel bizonyításában célravezető speciális esetnek tekinthetjük a 3.3. példa eredményét. Alkalmazzunk szuperpozíciót. Hogyan?

4.3. (Folytatás.) Van azonban más út is: tekinthetjük a 3.34. példa eredményét is célravezető speciális esetnek, s így szuperpozícióval más bizonyítást adhatunk. Hogyan?

4.4. Adottak az $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ együtthatók, határozzuk meg $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$ számokat úgy, hogy az

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k = b_0 \binom{x}{k} + b_1 \binom{x}{k-1} + \dots + b_k \binom{x}{0}$$

egyenlet x -ben azonosan teljesüljön (lásd a 3.65. példa jelöléseit).

Mutassuk meg, hogy ennek a problémának pontosan egy megoldása van.

4.5. A 3.3. pontban S_3 -ra nyert kifejezést vezessük le másképpen, a 4.3. példa módszerének alkalmazásával.

4.6. A 3.3. pontban S_3 -ra nyert kifejezést vezessük le másképpen a 4.3. példa eredményének alkalmazásával (az elméletre a 4.2. példában utalunk).

4.7. A 3.3. példa szempontjából mit jelent a 4.3. példa?

4.8. Kérdés a 4.1. ponthoz: Mit mondhatunk az $n = 2$ speciális esetről? Ha csak két pontunk van, akkor természetesen mondhatnánk, hogy a legegyszerűbb rajtuk áthaladó, egyértelműen meghatározott vonal az egyenes. Összhangban van ez azzal az állásponttal, melyhez a 4.1.(5) pontban végül is eljutottunk?

MEGOLDÁSTÍPUSOK

4.9. Kérdés a 4.2. ponthoz: Mit mondhatunk arról a speciális esetről, melyben

$$y_i = 0, \quad \text{ha} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

azaz mindegyik ordináta eltűnik?

4.10. Kérdés a 4.3. ponthoz: Megfelel-e az $f(x)$ polinom a feltétel összes részének? Fokszáma a lehető legalacsonyabb-e?

4.11. *Lineáris kombináció vagy szuperpozíció.* Legyen

$$V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$$

n jól meghatározott tulajdonságú (jól definiált halmazhoz tartozó) olyan matematikai objektum, amelyeknek bármilyen

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$$

számokkal képezett

$$c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3 + \dots + c_n V_n$$

lineáris kombinációja is ugyanolyan tulajdonságú (ugyanahhoz a halmazhoz tartozik).

Itt van két példa:

a) Legyenek $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ legfeljebb d -ed fokú polinomok; lineáris kombinációjuk ismét legfeljebb d -ed fokú polinom.

b) Legyenek $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ adott síkkal párhuzamos vektorok; lineáris kombinációjuk (az összeadás itt vektorösszeadást jelent) ismét az adott síkkal párhuzamos vektor).

Az a) példának szerepe van a 4.3. pontban. A 4.4(3) alpontra tekintettel figyeljük meg, hogy az összeadás és kivonás a lineáris kombináció speciális esetei ($n = 2$; $c_1 = c_2 = 1$, illetve $c_1 = -c_2 = 1$).

A b) példa további lehetőségekre utal: az absztrakt algebrában azokat az objektumokat, amelyeket az algebra „szokásos” törvényei szerint lineárisan kombinálhatunk, „vektoroknak” és halmazukat „vektortérnek” nevezzük.

A felsőbb matematika több ágában szerepet játszanak a lineáris kombinációk (vektorterek). Itt csak néhány példát tárgyalhatunk, nem túlságosan nehezeket (4.12., 4.13., 4.14. és 4.15.).

A „lineáris kombináció” és a „szuperpozíció” kifejezést ugyanabban az értelemben használjuk; de az utóbbit gyakrabban. A „szuperpozíció” kifejezés a fizikában lépten-nyomon előfordul (különösen a hullámmélethez). Csak egy példát veszünk a fizikából (4.16.); ez számunkra elég egyszerű és több tekintetben fontos.

*4.12. *Konstans együtthatójú, homogén lineáris differenciálegyenletek.* Alakjuk:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0;$$

a_1, a_2, \dots, a_n megadott számokat nevezzük az egyenlet *együtthatóinak*; n az egyenlet *rendje*; y az x független változó függvénye; $y', y'', \dots, y^{(n)}$ szokásos jelölés szerint y egymás után következő deriváltjai. Minden, az egyenletnek elegettevő y függvényt az egyenlet *megoldásának* vagy „integráljának” nevezünk.

a) Mutassuk meg, hogy a megoldások lineáris kombinációja is megoldás.

b) Mutassuk meg, hogy van

$$y = e^{rx}$$

speciális alakú (partikuláris) megoldás, ahol r alkalmasan választott szám.

c) Kombináljunk ilyen speciális alakú partikuláris megoldásokat úgy, hogy a lehető legáltalánosabb megoldáshoz jussunk.

*4.13. Határozzuk meg az

$$y'' = -y$$

differenciálegyenletnek és az

$$y = 1, \quad y' = 0, \quad \text{ha} \quad x = 0$$

kezdőfeltételnek eleget tevő y függvényt.

4.14. Homogén lineáris differenciaegyenletek állandó együtthatókkal. Alakjuk:

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0.$$

Az a_1, a_2, \dots, a_n megadott számokat nevezzük az egyenlet *együtthatóinak*; n az egyenlet *rendje*;

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$$

számok végtelen sorozatát *megoldásnak* nevezzük, ha az egyenletet $k = 0, 1, 2, \dots$ esetben kielégítik.

(y_x -et az x független változó nem negatív, egész értékeire definiált függvényének tekinthetjük. Másfelől a szóban forgó egyenletet rekurziós formulának, vagyis olyan egyöntetű szabálynak foghatjuk fel, amelynek segítségével kiszámíthatjuk a sorozat tetszőleges y_{k+n} elemét az n megelőzőből, $y_{k+n-1}, y_{k+n-2}, \dots, y_k$ -ből — vagy y_k -t az $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n}$ -ből.)

a) Mutassuk meg, hogy a megoldások lineáris kombinációja is megoldás.

b) Mutassuk meg, hogy van

$$y_k = r^k$$

speciális alakú partikuláris megoldás, ahol r alkalmasan választott szám.

c) Kombináljunk ilyen speciális alakú partikuláris megoldásokat úgy, hogy a lehető legáltalánosabb megoldáshoz jussunk.

4.15. A Fibonacci-számok sorozatát

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

a következő differenciaegyenlettel (rekurziós formával):

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$$

és az

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1$$

kezdőfeltételekkel értelmezhetjük.

Fejezzük ki y_k -t k -val.

4.16. *Mozgások szuperpozíciója.* Miután Galilei rájött a szabadesés és a tehetetlenség törvényére, kombinálta (összekapcsolta) ezt a kettőt, és felfedezte az elhajított test pályáját (a hajításakor leírt görbét). Bizonyos fokig az olvasó újra átélheti azt, amit Galilei, ha megérti, hogy a modern jelölések mennyire segítségére vannak.

Jelöljük x -szel és y -nal egy függőleges síkban felvett derékszögű koordináta-rendszer tengelyeit; az x tengely legyen vízszintes, az y tengely mutasson felfelé. Ebben a síkban mozog egy elhajított test (anyagi pont) súrlódás nélkül. A $t = 0$ időpontban indul az origóból. A test kezdősebessége v , kezdő iránya az x tengely pozitív irányával α szöget zár be. A hajítás valóságos mozgásához hozzárendelhe-

tünk három olyan képzelt (virtuális) mozgást, amelyeknek ugyanaz a kezdőpontja és az indulási időpontja.

a) Nyugalmi helyzetből induló és szabadon eső súlyos anyagi pont koordinátái a t időpontban:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = -\frac{1}{2}gt^2$$

b) A t időpontban olyan gravitációtól mentes anyagi pont koordinátái, amely átvette a kezdősebesség függőleges $v \sin \alpha$ komponensét, a tehetetlenség törvénye szerint

$$x_2 = 0, \quad y_2 = tv \sin \alpha$$

c) A t időpontban olyan gravitációtól mentes anyagi pont koordinátái, amely átvette a kezdősebesség vízszintes $v \cos \alpha$ komponensét, a tehetetlenség törvénye szerint

$$x_3 = tv \cos \alpha, \quad y_3 = 0.$$

Ha a valódi mozgás a „legegyszerűbb” feltevésnek megfelelően e három virtuális mozgásból tevődik össze, akkor mi a pálya?

Második rész

A következő vizsgálódás fontos fázisait a 4.17. és 4.24. példák kezdik meg.

4.17. Sokféle kiindulás. Legyen tetraéderünk két szemközti élének hossza ugyanakkora, a ; ezek az élek merőlegesek egymásra is, a középpontjukat összekötő b hosszúságú szakaszra is. Határozzuk meg a tetraéder térfogatát.

Többféleképpen is kiindulhatunk. Ha az olvasónak segítségre van szüksége, nézze meg a következő 4.18—4.23. példákat (közülük néhányat vagy mindet). Ha el akarja képzelni a feladatunkban szereplő térbeli viszonyokat, keressen valamilyen egyszerű merőleges vetületet vagy egyszerű keresztmetszetet.

4.18. Mi az ismeretlen? A 4.17. példában egy tetraéder térfogata az ismeretlen.

Hogyan határozhatunk meg ilyen típusú ismeretlent? A tetraéder térfogatát ki lehet számítani az alapterületből és a magasságból — de a 4.17. példában egyiket sem ismerjük.

Hát akkor mi az ismeretlen?

4.19. (Folytatás.) Szükségünk van egy háromszög területére — *hogyan határozhatunk meg ilyen típusú ismeretlent?* A háromszög területét kiszámíthatjuk az alapterületéből és a magasságából — de ezek közül csak az egyiket ismerjük abban a háromszögben, amely a 4.17. példa szerint a tetraéder alapja.

Szükségünk van egy szakasz hosszára — *hogyan határozhatjuk meg az ilyen típusú ismeretlent?* Szakasz hosszát rendszerint háromszögből számítjuk ki — de az ábrában nincs olyan háromszög, amely a 4.17. példa tetraéderjének a magasságát tartalmazná.

Az ábrában nincs ilyen háromszög, de *talán beállíthatnánk egyet?* Mindenesetre *vezessünk be alkalmas jelöléseket és gyűjtsük össze, amink van.*

4.20. Itt van a mienkkel rokon és már megoldott feladat: Kiszámíthatjuk egy tetraéder térfogatát, ha alapterülete és magassága adott. Ezt nem alkalmazhatjuk a 4.17. példában közvetlenül, mert a tetraédernek sem az alapterülete, sem a magassága nincs megadva. Akadhat viszont alkalmasabb tetraéder, amely a megadottat tartalmazza.

4.21. (Folytatás.) Akadhat olyan alkalmasabb tetraéder is, amelyet a megadott tetraéder tartalmaz.

4.22. Több előismeret segíthet. Ha ismerjük a *prizmoidképletet*, akkor a 4.17. példa már könnyű.

A *prizmoid* poliéder. Két lapja párhuzamos, ezeket *alap-* és *fedőlapnak*, a többi lapját *oldallapnak* nevezzük. Háromfajta éle van: az *alaplapot*, a *fedőlapot* határoló él és a többi — úgynevezett — *oldalél*. Mindegyik oldalél (és ez fontos része a definíciónak) az *alaplappal* és a *fedőlap* egy-egy csúcsát köti össze. A hasáb bizonyos szempontból speciális esetnek tekinthető.

Az *alap-* és *fedőlap* távolsága a *prizmoid magassága*. Az *alap-* és *fedőlappal* párhuzamos, tőlük egyenlő távolságban levő sík a *prizmoidot* sokszögben metszi, melyet *középmetszetnek* nevezünk.

Legyen V a *prizmoid* térfogata, h a *magassága*,

L , M és N

pedig rendre az *alaplappal*, a *középmetszet*, és a *fedőlap* területe. Akkor

$$V = \frac{(L + 4M + N)h}{6}.$$

(Ez a *prizmoidképlet*.) Alkalmazzuk a 4.17. példára.

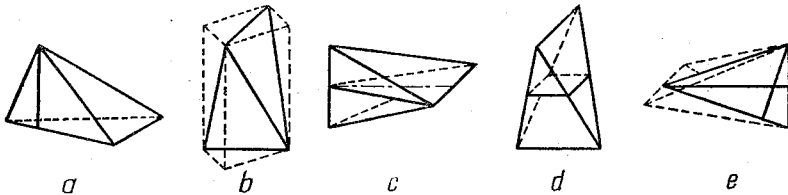
4.23. Lehet, hogy az olvasó nem követte a 4.17. példa megoldásának azt a menetét, amely a 4.18. példából indult ki és a 4.19. példán keresztül vezetett tovább, esetleg más úton ért célhoz. Ha így van, vegye fontolóra az eredményt, térjen vissza az elhagyott útra és kövesse végig.

4.24. A *prizmoidképlet*. Tanulmányozzuk minden oldaláról a kérdést, vizsgáljuk különböző szempontokból, gondoljuk át újra meg újra, azután pedig nézzük meg a 4.5. ábrát. Ugyanarra az eredményre négy különböző levezetést találunk. Az összehasonlítás hasznunkra lehet.²

Négy levezetésünk közül három nem használja a *prizmoidképletet*, de egy igen (4.22. példa). Így a *prizmoidképletnek* a tárgyalott problémában előforduló speciális esetére implicite végülis három különböző bizonyításunk van. Átalakíthatnánk-e legalább az egyik bizonyítást úgy, hogy az explicite megadja a képletet? Kiterjeszthetnénk-e a levezetést úgy, hogy a képlet ne csak speciális esetre vonatkozzék, hanem általános érvényű legyen?

Gondoljuk meg, első tekintetre melyik látszik a legesélyesebbnek a szóban forgó három levezetés közül (4.20., 4.21., 4.18., 4.19. és 4.23. példa).

4.25. Igazoljuk a *prizmoidképletet* hasábra (ez nagyon speciális *prizmoid*).



4.5. ábra. Forgassuk a kérdést jobbra-balra, vizsgáljuk meg minden oldalról és különböző szempontokból

² Ebben Leibniz véleményét követjük; lásd a 3.31. példában a vonatkozó idézetet.

4.26. Igazoljuk a prizmoidképletet gúlára (mely alkalmas helyzetben csonkagúlának — ha jobban tetszik, a prizmoid elfajult vagy határesetének — tekintendő; a fedőlapja pönttá zsugorodott).

4.27. Általánosítsuk azt az esetet, amelyen a 4.20. példa megoldása alapszik és vizsgáljuk a következő tulajdonságú P prizmoidot: P álljon n olyan prizmoidból (P_1, P_2, \dots, P_n), amelyek egymást részben sem fedik és amelyeknek az alaplapjai P alaplapját, fedőlapjai P fedőlapját teljesen kitöltik. (A 4.20. példában — lásd a 4.5/b ábrát — P négyzet alapú hasáb, $n = 5$, P_1, P_2, P_3 és P_4 egybevágó tetraéderek, P_5 másféle tetraéder.) Mutassuk meg: ha a prizmoidképlet a tárgyalt $n + 1$ prizmoidból n -re érvényes, akkor szükségképpen érvényes az $n + 1$ -edikre is.

4.28. Általánosítsuk azt az esetet, amelyen a 4.22. példa megoldása alapszik (4.5/d ábra). Jelöljük l -lel és n -nel egy tetraéder két szemközti élét. Fekessünk l -en át n -nel párhuzamos és n -en át l -lel párhuzamos síkot; jelöljük h -val a két párhuzamos sík távolságát. A tetraédert olyan prizmoidnak (ha úgy jobban tetszik, elfajult prizmoidnak) tekinthetjük, amelynek l és n az alap-, illetve fedőlapja és h a magassága. (Középmetszete paralelogramma.)

Igazoljuk a prizmoidképletet ilyen prizmoidokra is.

4.29. Bizonyítsuk be általánosan a prizmoidképletet (az előzően tárgyalt speciális esetek szuperpozíciójával).

4.30. *Egy lánc sem erősebb, mint a leggyengébb láncszeme.* Vizsgáljuk át újból a 4.28. példa megoldását.

4.31. Vizsgáljuk át újból a 4.29. példa megoldását.

*4.32. *Simpson-szabály.* Legyen $f(x)$ az

$$a \leq x \leq a + h$$

intervallumban értelmezett (és folytonos) függvény, és

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = I,$$

$$f(a) = L, \quad f\left(a + \frac{h}{2}\right) = M, \quad f(a + h) = N.$$

Akkor bizonyos feltételek mellett, amelyeket vizsgálni akarunk,

$$I = \frac{L + 4M + N}{6} h.$$

I -nek ezt a kifejezését *Simpson-szabálynak* nevezzük.

Jelöljünk n -nel valamilyen nem negatív egész számot, legyen

$$f(x) = x^n, \quad a = -1, \quad h = 2.$$

Határozzuk meg azokat az n értékeket, melyekre az I integrál Simpson-szabállyal pontosan kiszámítható.

(Még ha a Simpson-szabály pontosan véve nem is, de lehet „közelítően érvényes”; ami azt jelenti, hogy a két oldal közti különbség relatíve kicsiny. Gyakori eset ez, és ezért fontos a Simpson-szabály integrálértékek közelítő kiszámítására.)

*4.33. Bizonyítsuk be, hogy a Simpson-szabály érvényes minden 3-nál nem magasabb fokszámú polinomra; tételezzük fel, hogy $a = -1$ és $h = 2$.

*4.34. Bizonyítsuk be, hogy a Simpson-szabály érvényes minden 3-nál nem magasabb fokú polinomra a és h tetszőleges értéke mellett is.

*4.35. Vezessük le a 4.34. példából a prizmoidképletet, analitikus térgeometria és integrálszámítás segítségével. („Hogy a könnyű utat becsülni tudjuk, tegyük meg előbb a nehezebbet”, mondta a „hagyományos” matematikatanár.)

4.36. *Bővítsük ki az alkalmazási területet.* Néhány előző példamegoldásunkban túl léptük a 4.4.(4) pontban megfogalmazott szuperpozíció alkalmazási területének határait. Több könnyebben kezelhető speciális eset megoldásának a szuperponálásával jutottunk ugyan az általános megoldáshoz, de ezek az esetek nem voltak ugyanolyan típusúak, nem is vonatkoztak ugyanarra a speciális helyzetre. (A 4.29. példában szuperponált testek a 4.26. példában már említett gúla és a 4.28. példában szereplő speciális helyzetű tetraéderek. A 4.33. példa szuperpozíciója is különböző természetű esetekre vonatkozott.) Lényegében a 4.4.(4) pont fogalmazásától csak abban térünk el, hogy nem egyetlen célravezető speciális helyzetből indultunk ki, hanem több ilyenből. Hadd bővítsük ki a megoldástípus alkalmazási területét: *Egy vagy több célravezető speciális helyzetből kiindulva, az általános megoldáshoz speciális eseteknek a szuperpozíciójával jutunk.*

A szuperpozíció egy (vagy néhány) célravezető speciális esettől az általánoshoz vezető utat jelöli meg. Ugyanazon végpontok között nagyon különböző összekötő utak vannak, amelyeket a buzgó problémamegoldónak egyaránt ismernie kell: az általános esetet megfelelő transzformációval gyakran vissza lehet vezetni célravezető speciálisra. (A 4.34. példa általános esetét az integrációs változó helyettesítésével a 4.33. példa speciális esetére vezettük vissza.) Kitűnően tárgyalja ezt a témát J. Hadamard, *Leçons de géométrie élémentaire. Géométrie plane*, 1898; *Méthodes de transformation*, 272–278. oldal.

MÁSODIK RÉSZ

ÚTBAN AZ ÁLTALÁNOS MÓDSZER FELÉ

Habár gondolkodási képességünket a legkülönbözőbb tárgyakra alkalmazzuk, mindig egy és ugyanaz marad. Épp oly kevésbé változtatja meg a gondolkodás lényegét a problémák sokfélesége, mint a napfényt a tárgyak sokfélesége, amelyeket megvilágít.

DESCARTES: I. szabály, *Oeuvres*, X. kötet, 360. oldal.

5. FEJEZET

PROBLÉMÁK

A problémamegoldás a céltudatos gondolkodásnak legkülönlegesebb és legjellegzetesebb fajtája.

WILLIAM JAMES

5.1. Mi a probléma?

A probléma szót a következőkben igen átfogó értelemben fogjuk használni. Első teendőnk, hogy körvonalazzuk jelentését.

Modern életünk folyamán nem nehéz élelemhez jutni. Ha otthon megéhezem, előkaparok valamit a hűtőszekrényből, ha a városban vagyok, elmegyek egy kávéházba vagy valamilyen üzletbe. Más dolog az, ha a hűtőszekrény üres vagy ha nincs pénzem. Ebben az esetben élelemhez jutni probléma. — Általában egy kívánságból vagy származik probléma, vagy nem: ha azonnal, minden akadály nélkül olyan kézenfekvő tennivaló jut eszembe, amellyel elérem a kívánt dolgot, nincs probléma, ha azonban ilyen nem jut eszembe, akkor van. „Problémánk van”, tehát azt jelenti, hogy olyan *megfelelő tennivalót keresünk tudatosan, amely alkalmas valamilyen világosan megfogalmazott, de közvetlenül meg nem közelíthető cél elérésére*. Problémát megoldani a megfelelő tennivaló megtalálását jelenti.

A probléma akkor „nagy”, ha nehéz, akkor „kicsi”; ha könnyű megoldani. Bizonyos mérvű nehézség fémjelzi a problémát: ha nincs nehézség, nincs is probléma.

Jellegzetes probléma az, ha valamilyen kevésbé ismert vidéken meg akarjuk találni egy előre meghatározott helyhez vezető utat. Könnyen elképzelhetjük, hogy milyen komoly probléma volt ez őseink számára, akik még őserdőben éltek. Akár ez az oka, akár nem, a problémák megoldása mindig valahogy útkeresésnek tűnik: kiútnak valamilyen nehéz helyzetből, útnak valamilyen akadály kikerülésére.

Tudatos gondolkodásunk nagyobb része problémák körül forog. Ha nemcsak álmódozunk vagy ábrándozunk, gondolataink valamilyen célra irányulnak.

Módot keresünk elérésére — igyekszünk valamilyen utat találni, amely célunkhoz elvezet.

A problémamegoldás az intelligencia jellegzetes teljesítménye, az intelligencia pedig jellegzetes emberi tulajdonság. Valamely akadályt megkerülni, eszköz használni, ahol eszköz nélkül nem lehet boldogulni; ez a lehetőség emeli az okos állatot az ostoba, az embert messze a legokosabb állat, a tehetséges embert pedig többi embertársai fölé.

Nekünk embereknek semmi sem olyan érdekes, mint az emberi tevékenység. Márpedig a legjellemzőbb emberi tevékenység a problémamegoldás; a célratoró gondolkodás, eszközök keresése valamely kitűzött cél eléréséhez. Arra törekszünk, hogy megértsük ezt a tevékenységet, és azt hiszem, hogy ez a cél megérdemli a legnagyobb érdeklődést is.

A megelőzőekben olyan elemi matematikai feladatokat tanulmányoztunk, amelyeket megfelelően csoportosítva, ugyanazon módszerrel oldhattunk meg. Így bizonyos megfigyelési alapra tettünk szert, és most megkíséreljük, hogy erről az alapról általánosabb elveket jussunk. Amennyire lehetséges, megpróbálunk nem matematikai problémákat is érinteni. Túlzott, de természetes becsvágy lenne, ha olyan általános módszerre törekednénk, amely minden problémára alkalmazható, habár a problémák, melyekkel szembekerülünk, végtelenül változatosak. De mindegyikünknek mégiscsak egy feje van, és így érthető, ha egyetlen módszert szeretnénk problémáink megoldására.

5.2. A problémák osztályozása

Egy tanuló írásbeli vizsgát tesz matematikából; átlagtanuló, de készült a vizsgára. Miután elolvassa az egyik kitűzött feladatot, jó, ha megkérdezi magát: „Milyen típusú feladat is ez?” A kérdés hasznára lehet: ha már osztályozni tudja a feladatot, ha felismeri, milyen típusú, tankönyve valamelyik fejezetébe is be tudja esetleg sorolni, és így máris tett némi előhaladást, emlékezetébe idézheti az ilyen típusú feladatok megoldására tanult módszert.

Ez — bizonyos értelemben — fennáll a problémamegoldás minden szintjén. Az a kérdés, hogy „milyen típusú probléma is ez” elvezet a következőhöz: „mit lehet kezdeni az ilyenfajta problémával?”. Ilyen kérdések még magas színvonalú kutatásoknál is előnnel járnak.

Ezért hasznos a problémák osztályozása, többféle típus megkülönböztetése. A helyes osztályozásnak olyan típusokat kell bevezetnie, hogy a *probléma típusa már a megoldás típusára is utaljon*.

Most sem a részletekbe nem mehetünk bele, sem tökéletes osztályozást nem kísérlelhetünk meg. Némi szabadsággal értelmezve egy Euklidészre és kom-

mentátoraira visszanyúló hagyományt, éppen csak jellemezni akarjuk a problémák két, egészen általános típusát.

Euklidesz „Elemi”-ben axiómák, definíciók és „propozíciók” vannak. Néhány kommentátora és fordítója kétféle „propozíciót” különböztet meg: az elsőnek (latin neve „problema”) célja, hogy egy alakzatot megszerkesszen, a másodiké (latin neve „theorema”), hogy egy tételt bebizonyítson. Általánosítva ezt a megkülönböztetést, kétféle problémáról beszélhetünk: „meghatározó problémáról” és „bizonyító problémáról”. A *meghatározó probléma* célja, hogy meghatározzon (megszerkesszen, előállítson, megkapjon, azonosítsa...) valamit, a probléma ismeretlenjét. A *bizonyító probléma* célja, hogy eldöntse egy állítás helyes vagy téves voltát, hogy azt bebizonyítsa, vagy megcáfolja.

Például, ha azt kérdezzük: „Mit is mondott?”, akkor meghatározó problémát vetünk fel. Ha viszont azt kérdezzük „Mondta ő ezt?”, akkor bizonyító problémával van dolgunk.

Erről a két típusú problémáról lássunk további részleteket a következő két pontban.

5.3. Meghatározó problémák

A „meghatározó probléma” célja, hogy meghatározzon valamit, a probléma *ismeretlenjét*, úgy, hogy ez teljesítse azt a *feltételt*, amely az *adatokat* összekapcsolja az ismeretlennel. Lássunk két példát.

„Adott két szakasz, a és b , továbbá egy szög γ . Szerkesszünk olyan paralelogrammát, melynek az adott szakaszok a γ szöget bezáró oldalai.”

„Adott két szakasz, a és b , továbbá egy szög, γ . Szerkesszünk olyan paralelogrammát, melynek az adott szakaszok a γ szöget bezáró átlói.”

A két probléma adatai ugyanazok: a két szakasz a és b , továbbá a γ szög. Az ismeretlen mindkét problémában egy paralelogramma. Így problémáinkat *a priori* nem lehet az ismeretlen természetére alapján megkülönböztetni. A feltevés az, ami a két probléma közti különbséget adja, az adat és az ismeretlen között megkövetelt kapcsolat. A paralelogrammának az oldalaihoz való viszonya természetesen különbözik az átlóihoz való viszonyától.

Az *ismeretlen* bármely elképzelhető kategóriába tartozhat. Szerkesztési problémában az ismeretlen egy alakzat, esetleg háromszög. Ha viszont algebrai egyenletet oldunk meg, ismeretlenünk egy szám, ennek az egyenletnek egyik gyöke. Ha azt kérdezzük: „Mit mondott?”, az ismeretlen lehet egy szó vagy szavak sorozata, egy mondat vagy a mondatok sorozata, egy egész szöveg. Ha a problémát pontosan fogalmaztuk meg, akkor annak meg kell határoznia

azt a kategóriát (azt a halmazt), amelyhez az ismeretlen tartozik. Mielőtt hozzáfognánk, tudnunk kell, milyen típusú ismeretlen meghatározását kívánja a probléma: háromszögét vagy számét, vagy szóét, vagy ...

A pontosan megfogalmazott problémának határozottan és félreérthetetlenül meg kell jelölnie a *feltételt*, amelyet az ismeretlennek ki kell elégítenie. A probléma világosan megjelöli az objektumoknak azt a halmazát, amelyhez az ismeretlennek tartoznia kell, és ezen objektumok bizonyos részhalmaza elégíti csak ki a feltételt. *Megoldásnak* nevezünk minden olyan objektumot, amely ehhez a részhalmazhoz tartozik. Lehet, hogy a részhalmaz üres: akkor nincs megoldás. (A „megoldás” kifejezésre vonatkozó megjegyzéseket lásd az 5.13. példában.)

Itt jegyezzük meg, hogy minden meghatározó problémát különböző értelemben vethetünk fel. Szigorúan véve, a probléma az *összes* megoldás meghatározását (létrehozását, megszerkesztését, azonosítását, felsorolását, jellemzését...) megköveteli (a fent említett részhalmazt hiánytalanul). Kevésbé szigorúan véve a probléma csak egyik (bármelyik) megoldást kívánja, vagy — esetleg — néhányat közülük. Néha az is elég, ha meghatározzuk, hogy egyáltalán létezik-e megoldás, vagyis azt, hogy a megoldások halmaza üres-e vagy sem. A matematikai problémákat szigorú értelemben szokás venni, ha csak a szöveg nem mondja határozottan az ellenkezőjét. De számos gyakorlati probléma ilyen értelemben vett „szigorú” felvetésének nem sok értelme van.

Ha matematikai problémákkal foglalkozunk, az „adatok” kifejezést használjuk (hacsak a szöveg nem utal az ellenkezőjére) az összes adott (ismert, megengedett...) elemekre (vagy azok teljes halmazára), melyeket az ismeretlennel a feltétel kapcsol össze. Ha az a feladatunk, hogy a háromszögét a , b és c oldalaiából szerkesszük meg, akkor az adat a három szakasz: a , b és c . Ha az a feladat, hogy az

$$x^2 + ax + b = 0$$

másodfokú egyenletet oldjuk meg, két adat van: két szám, a és b . Egy problémának lehet egyetlen adata, vagy akár egy sem. Példa erre: „Határozzuk meg a kör területének és a köré írt négyzet területének a viszonyát”. A keresett viszony független az alakzat nagyságától, és így felesleges a sugár hosszának, vagy valami más, ilyenfajta adatnak a megadása.

Az ismeretlen, a feltétel és az adatok a meghatározó probléma *fő részei*. Józan ésszel nem remélhetjük, hogy meg tudunk oldani olyan problémát, amelyet nem értünk. Mármost a probléma megértéséhez tudnunk kell, sőt nagyon jól kell tudnunk, hogy mi az ismeretlen, mik az adatok, és mi a feltétel. Így hát ajánlatos, amikor egy problémán dolgozunk, hogy fő részeinek szenteljünk különös figyelmet.

5.4. Bizonyító problémák

Híre járja, hogy X államtitkár bizonyos alkalommal rendkívül erős kifejezéssel illette Y képviselőt (a kifejezést meg sem merjük ismételni). Híre ugyan járja, de bizonyos kétely is fűződik azért hozzá. Az a kérdés: „Csakugyan mondta-e ezt?” sok embert izgat. Tárgyalta a sajtó, megemlégették egy parlamenti bizottságban, lehet, hogy még bíróság elé is fog kerülni. Ha valaki ezt a kérdést komolyan veszi, akkor bizonyító problémával van dolga. Fel kell derítenie a kételyt a szóbeszéd körül, be kell bizonyítani, hogy használták-e az idézett kifejezést, vagy meg kell cáfolnia, végül is az elérhető legnagyobb valószínűség alapján döntenie kell bizonyíték és ellenbizonyíték közt.

Ha egy matematikai bizonyító problémánk van, el kell oszlatnunk a kételyt a világosan megfogalmazott A matematikai állítás körül: vagy bizonyítanunk kell A -t, vagy megcáfolnunk. Híres, ilyenfajta megoldatlan probléma Goldbach sejtésének bizonyítása vagy cáfolása: ha n páros egész szám és $n > 4$, akkor n két páratlan prímszám összege.¹

Goldbach állítását (ez csak pusztá állítás, még nem tudjuk, hogy helyes-e vagy téves) a matematikai állítások *legszokeványosabb* alakjában mondtuk ki: az *hipotézisből* és *konklúzióból* (feltevésből és következményből) áll; a „ha”-val kezdődő első rész a hipotézis, az „akkor”-ral kezdődő második rész a konklúzió.²

Ha egy, a legszokeványosabb formában kimondott matematikai állítást kell bizonyítanunk vagy cáfolnunk, akkor találoan nevezhetjük a hipotézist és a konklúziót a probléma *fő részeinek*. Ezek a fő részek meg is érdemlik különleges figyelmünket. Hogy bizonyíthassuk az állítást, összekötő logikai láncot kell találnunk a fő részek, a hipotézis és konklúzió között; hogy megcáfoljuk (lehetőleg ellenpéldával), azt kell megmutatnunk, hogy egyik fő részből, a hipotézisből, nem következik a másik, a konklúzió. Sok matematikus, híresek csakúgy, mint kevésbé híresek, megpróbálták már eloszlatni a kételyt Goldbach sejtése körül, de sikertelenül. Bár a hipotézis és a konklúzió megértéséhez kevés matematikai tudás szükséges, még sem sikerült senkinek sem ezeket szigorú érveléssel összekötni; de ellenpéldát sem adott eddig senki.

¹ Lásd MPR 1. kötet, 4–5. old.

² Vannak olyan matematikai állítások is, amelyeket nem lehet természetes módon hipotézisre és konklúzióra bontani. Lásd G. I. „Meghatározó feladatok, bizonyító feladatok” 161. old. (4). Itt van például ilyen állítás: „A π szám tizedes tört előállításában van kilenc egymás után következő 9-es jegy”. Ennek az állításnak a bizonyítása vagy megcáfolása határozott matematikai probléma — amely azonban jelenleg reménytelenül nehéznek látszik. „Egy bolond több kérdést tud feltenni, mint amennyit 9 böles meg tud válaszolni”.

5.5. Az ismeretlen összetevői, a feltétel részei

Ha az a problémánk, hogy kört szerkesszünk, két dolgot kell meghatározunk; a kör középpontját és a sugarát. Előnyös lehet, ha feladatunkat részekre osztjuk: a két meghatározandó — a középpont és a sugár — közül próbáljuk előbb az egyiket, aztán a másikat megkeresni.

Ha az a problémánk, hogy egy pontot határozzunk meg a térben, és ehhez analitikus geometriát használunk, akkor három számot kell tulajdonképpen meghatározunk: a pont három koordinátáját, x -et, y -t és z -t.

A nekünk előnyösebb álláspontnak megfelelően vagy azt mondhatjuk, hogy első példánkban két ismeretlen van, vagy azt, hogy csak egy; második példánkban, hogy vagy három ismeretlen, vagy csak egy. Van azonban más szempont is, és gyakran ez az előnyösebb: mondhatjuk azt, hogy mindkét példában egy-egy ismeretlen van, de bizonyos értelemben részekre bontva. Így első példánkban a kör az ismeretlen, de ez az ismeretlen *két részből áll*, vagy *két összetevőjű*; *összetevői* a középpontja és a sugara. Hasonlóan, második példánkban, a pont meghatározásában az ismeretlen *három összetevőjű* — *összetevői* a három koordináta, x , y és z . Általánosítva: beszélhetünk egy több részből álló vagy *több összetevőjű* x ismeretlenről és ennek n összetevőjéről (x_1, x_2, \dots, x_n).

A most bevezetett terminológiának az a haszna, hogy bizonyos általános vizsgálatokban nem kell különbséget tennünk egyismeretlenes és több ismeretlenes problémák között: az utóbbit az előbbire vezethetjük vissza; a több ismeretlent úgy tárgyaljuk, mint egy ismeretlen összetevőit. Például, amit az 5.3. pontban mondtunk, lényegében ráillik olyan esetekre is, amelyekben több ismeretlent kell meghatározunk, holott kimondottan nem említettük az 5.3. pontban ezt az esetet. Később meglátjuk, hogy terminológiánk a legváltozatosabb összefüggésekben is hasznos.

Ha problémánk meghatározó jellegű, akkor előnyös a feltételt több részre vagy *részfeltételre* felosztani, amint ezt bőven volt alkalmunk megfigyelni. Szerkesztési feladatunkban úgy oszthatjuk két részre a feltételt, hogy a *részek* az ismeretlen pont számára egy-egy mértani helyet jelentsenek (1. fejezet). Ha szöveges feladatot oldunk meg algebrai eljárással, akkor a feltételt annyi részre bontjuk, ahány ismeretlenünk van, s így mindegyik rész ad egy-egy egyenletet (2. fejezet).

Ha bizonyító problémánk van, akkor előnyös vagy a hipotézist, vagy a konklúziót, vagy mindkettőt alkalmas részekre bontani.

5.6. „Eljárás kerestetik”

Ha Euklidesz „Elemi”-nek felfogásában szerkesztünk meg egy alakzatot, nem választhatjuk szabadon szerszámainkat, vagyis eszközeinket: kikötés az, hogy az alakzatot körzővel és vonalzóval kell megszerkeszteni. Ebben az esetben a probléma megoldása *jól összehangolt mértani műveletek* olyan sorozatából áll, mely az adatokból indul ki, és a keresett alakzathoz végződik: műveletei egyenes vonalak és körök megrajzolásából és azok metszéspontjainak meghatározásából állanak.

Nézzük meg jobban ezt a példát. Élesebb megfigyeléssel észre kell vennünk, hogy sok probléma megoldása lényegében egy *eljárásból*, cselekedetek menetéből, megfelelően összekapcsolódó műveletek egymásutánjából, egy „*modus operandi*”-ből áll.

Vegyük egy másodfokú (harmad- vagy negyedfokú) egyenlet megoldását. A megoldás megfelelően kapcsolódó *algebrai* műveletek egymásutánjából áll, amelyek az adatokból, az egyenlet megadott együtthatóiból indulnak ki, és a keresett gyökökhöz vezetnek. Műveleteink összeadás, kivonás, szorzás vagy osztás adott, vagy előzőleg nyert mennyiségekkel, vagy gyökvonás ilyen mennyiségekből.

Vegyünk most egy bizonyító problémát. A probléma megoldása, erőfeszítéseink eredménye: a bizonyítás, vagyis megfelelően kapcsolódó *logikai* műveletek vagy lépések sorozata, mely a hipotézisből indul ki, és a tételben kimondott konklúzióhoz vezet; minden egyes lépés egy-egy új állítást vezet le a hipotézis alkalmasan megválasztott részeiből, vagy a már ismert tényekből, vagy az előzőleg éppen bebizonyított állításokból.

Hasonló képet adnak a nem matematikai problémák is. A hídépítő szervező, koordinál, rengeteg sok eljárást hoz összefüggő rendszerbe: szállítóutat szerkeszt, alkatrészeket hajóz be, állványokat emeltet, betont kevertet, fémalkatrészeket hegesztet stb. Kénytelen ezeket az eljárásokat teljesen eltérő természetű pénzügyi, jogi, sőt politikai tárgyalásokkal összehangolni. Mindezek a műveletek egymástól függenek, a legtöbb közülük feltételezi, hogy bizonyos más természetűeket már előzőleg elvégeztek.

Vagy vegyük a bűnügyi történeteket. Ismeretlen itt a gyilkos; a szerző azzal hat ránk, hogy a detektív főhős kieszel valamilyen eljárásorozatot, amely a bűnjelekből indul ki, és a leleplezésben végződik: a gyilkos csapdába kerül.

A mi kutatásunk tárgya lehet bármilyen természetű ismeretlen vagy bármilyen típusú kérdés igazságának a felderítése. Problémánk lehet elméleti vagy gyakorlati, lehet jelentékeny vagy jelentéktelen. Ahhoz, hogy problémánkat megoldjuk, ki kell találnunk a logikai, matematikai vagy anyagi műveleteknek jól megtervezett, összefüggő eljárásrendszerét, amely a hipotézistől halad a konklúzióig, az adatoktól az ismeretlenig, attól, ami már birtokunkban van, addig, amit birtokunkba akarunk keríteni.

Példák és megjegyzések az 5. fejezethez

5.1. Határozzuk meg egy négyzet alapú derékszögű hasáb V térfogatát, az alap a éléből és a hasáb h magasságából.

Mi az ismeretlen? Mik az adatok? Mi a feltétel?

5.2. Határozzunk meg két, az

$$x^2 + y^2 = 1$$

egyenletnek eleget tevő x és y valós számot.

Mi az ismeretlen? Mik az adatok? Mi a feltétel? Jellemezzük a megoldások halmazát.

5.3. Határozzunk meg két, az

$$x^2 + y^2 = -1$$

egyenletnek eleget tevő x és y valós számot. Jellemezzük a megoldások halmazát.

5.4. Határozzunk meg két, az

$$x^2 + y^2 = 13$$

egyenletnek eleget tevő, x és y egész számot. Jellemezzük a megoldások halmazát.

5.5. Határozzunk meg három olyan valós számot, x , y és z -t, melyekre

$$|x| + |y| + |z| < 1.$$

(1) Adjuk meg a megoldások halmazát.

(2) Módosítsuk a feladatot, tegyük $<$ helyett \leq -t. Adjuk meg a megváltoztatott feladat megoldásainak halmazát.

5.6. Fogalmazzuk meg Pythagoras tételét.

Mi a hipotézis? Mi a konklúzió?

5.7. Jelöljön n pozitív egész számot, $d(n)$ pedig n osztóinak számát (pozitív egész osztókra gondolunk, 1-et és n -et is beleértve). Például

6 osztói: 1, 2, 3, 6; $d(6) = 4$,

9 osztói: 1, 3, 9; $d(9) = 3$.

Vizsgáljuk a következő állítást:

$d(n)$ páratlan, vagy páros aszerint, hogy n teljes négyzet, vagy nem teljes négyzet.

Mi a hipotézis? Mi a konklúzió?

5.8. *Bizonyítunk vagy meghatározunk?* Egyenlőek-e $\sqrt{3} + \sqrt{11}$ és $\sqrt{5} + \sqrt{8}$? Ha nem egyenlőek, melyik a nagyobb?

Fogalmazzuk meg újra, általános alakban. A probléma két, aritmetikai műveletekkel jól meghatározott a és b számra vonatkozik, és annak eldöntését kívánja, hogy három lehetséges eset közül

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b$$

melyik áll fenn.

Különböző szemszögből tekinthetjük a problémát:

(1) Először bizonyítanunk vagy cáfolnunk kell az $a = b$ állítást. Ha erről az állításról az derül ki, hogy hamis, akkor bizonyítanunk vagy cáfolnunk kell az $a > b$ állítást. Ezt a két feladatot vehetjük fordított sorrendben vagy akár egyszerre; mindenképp két egymáshoz kapcsolódó bizonyító problémánk van.

(2) A matematika különböző ágaiban sokszor használják a $\operatorname{sgn} x$ jelölést (olvassuk: „ x előjele” vagy „szignum x ”), melyet a következőképp értelmezünk:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Problémánk azt kívánja, hogy határozzuk meg $\operatorname{sgn}(a - b)$ értékét; ez pedig meghatározó probléma.

Nincs formai ellentmondás (nem is kell lennie, ha terminológiánkat gondosan eszeltük ki): (1) alatti A problémánk két egymáshoz kapcsolódó, egyszerre felvetett bizonyítási problémából áll; (2) alatti B problémánk meghatározó jellegű. Ez a két különböző alakban megfogalmazott probléma nem *azonos* (nem identikus) — de *egyenértékű* (ekvivalens). (Az „ekvivalens” szó használatának magyarázatát l. Gl. Segédfeladat, 217–220. old. és újabb magyarázatát a 9. fejezetben.)

Tartalmi hátránya sincs ennek a kétféle fogalmazásnak. Ellenkezőleg, jó arra, hogy ugyanazt a nehézséget két különböző szemszögből láthassuk; az egyik vonzóbb lehet számunkra, mint a másik; a kérdés jobban megközelíthető oldalát mutathatja, és így több lehetőséget nyújt a nehézség leküzdésére erről a jobban megközelíthető oldalról.

5.9. *További példákat!* Válasszunk ki bármilyen feladatot (van sok az előző fejezetekben), döntsük el, vajon „meghatározó”-e vagy „bizonyító”, és ennek megfelelően kérdezzük:

Mi az ismeretlen? Mik az adatok? Mi a feltétel?

Mi a konklúzió? Mi a hipotézis?

Ezeknek a kérdéseknek itt csak az a céljuk, hogy ráirányítsák a figyelmet a probléma fő részeire. A tapasztalat arról is meg fog győzni, hogy ezek a kérdések — ha komolyan tesszük fel őket, és gondosan válaszolunk rájuk — nagy segítséget jelentenek a megoldásban. Figyelmünk a probléma fő részeire összpontosul, megértésünk mélyebbé válik, és így helyes irányba indulunk el.

5.10. *A megoldási eljárás műveletek végtelen sorozatából is állhat.* Ha meg kell oldanunk az

$$x^2 = 2$$

egyenletet, akkor feladatunkat különbözőképp értelmezhetjük. Lehet ez az értelmezés a következő: „Határozzuk meg 2 pozitív négyzetgyökét öt értékes jegyre”; ebben az esetben teljesen elegendő teszünk köteleességünknek, ha az 1,4142 tizedes törtet állítjuk elő. Azonban az értelmezés lehet ez is: „Vonjunk négyzetgyököt 2-ből”, minden hozzáfűzött megjegyzés vagy könnyítés nélkül, és akkor nem végezhetjük el feladatunkat sem négy, de még akárhány, a tizedes vessző után álló számjegyi előállításával sem: a megoldás egy *eljárást*, az aritmetikai műveletek egy *rendszerét* követeli meg, amellyel az előírt tizedesjegyekből *akárhányat* meghatározhatunk.

Másik példa: „Határozzuk meg a kör és a kör köré írható négyzet területének hányadosát”. A válasz $\pi/4$, ha a π értéket ismertnek vesszük. Leibniz a feleletet (a $\pi/4$ törtet) végtelen sor alakjában adta:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Ez a sor az aritmetikai műveletek soha be nem végződő sorozatát írja elő, mellyel π tizedestört-előállításában akárhány számjegyet meghatározhatunk (persze, elméletben — a gyakorlatban ez az eljárás túl lassú). „Bár ez a sor, úgy ahogy van, gyors approximációt nem szolgáltat, úgy vélem, hogy megfelelőbb és egyszerűbb előállítást értelmünk számára a kör és a köré írt négyzet területének a hányadosáról elképzelni sem lehet” mondta Leibniz.³

5.11. A kör négyszögesítése. Amikor „meghatározó” problémát oldunk meg, akkor egy objektumot keresünk, az „ismeretlen” objektumot. Igen gyakran azonban ahhoz, hogy ezt az objektumot megkapjuk, bizonyos eljárást keresünk (műveletek, operációk sorozatát), világosabb megkülönböztetés kedvéért nevezzük ezt „ismeretlen operátor”-nak. Hogy milyen nagyon kíváncsatos ez a világos megkülönböztetés, azt most egy történetileg is nevezetes példával mutatjuk meg.

Adott a kör sugara, szerkesszünk *körzövel és vonalzóval* olyan négyzetet, amelyiknek a területe megegyezik a kör területével.

Ez a pontos alakja annak a híres régi problémának, a „kör négyszögesítésének”, mely még a régi görög geometerektől ered. Hangsúlyozzuk, hogy a probléma előírja az *eljárás természetét* (az „ismeretlen operátor”): a kívánt négyzet egy oldalát körzövel és vonalzóval kell megszerkeszteni, egyenesek és körök megrajzolásával és csak adott vagy olyan pontok felhasználásával, melyeket előzőleg rajzolt vonalak metszéspontjaként kaptunk. És — természetesen — az adott sugar két végpontjából kiindulva *véges számú* lépésben kell eljutnunk a keresett négyzet oldalának két végpontjához.

Sok évszázad után, melyek folyamán számtalan ember próbálkozott a megoldással, F. Lindemann 1882-ben bebizonyította, hogy nincs megoldás: az a négyzet, amelynek ugyanakkora a területe, mint az adott körnek, kétségtelenül „létezik” (az oldala bármilyen megadott pontossággal megközelíthető különféle, ismert, végtelen sok lépésből álló eljárásokkal; az egyik ilyen eljárás az 5.10. példában említett híres Leibniz-féle sort használja). Azonban az a fajta eljárás (vonalzóval és körzövel elvégezhető véges számú művelet), amelyet kerestünk, nem létezik. Szeretném tudni, hogy a keresett alakzat és a keresett eljárás, az „ismeretlen objektum” és az „ismeretlen operátor” közti világos megkülönböztetés csökkentette volna-e a szerencsétlen kör-négyszögesítők számát?!

5.12. Sorrend és következmény. A hídépítésben fontos eljárás az előre gyártott acélalkatrészek beillesztése. Néha fontos, hogy két ilyen művelet közül melyik előzi meg a másikat (ha a második darabot nem lehet beilleszteni addig, míg az első darab nincs a helyén), de lehet az is, hogy ez a sorrend nem fontos (ha a két darab független egymástól). A körülményektől függ az, hogy két művelet végrehajtásában figyelembe kell-e vennünk a sorrendet, vagy nem. Hasonlóan, előadásban vagy nyomtatásban egy-egy bizonyítás lépései egymás után következnek. Előfordulhat az is, hogy időrendben megelőzi egyik lépés a másikat, de logikailag nem. Különbséget kell tennünk sorrend és következmény, időbeli *egymás után* következés és logikai *egymásból* következés között. (Erre a fontos témára még visszatérünk a 7. fejezetben.)

5.13. Szerencsétlen kétértelműség. A „megoldás” szónak több különböző jelentése van, melyek közül néhány nagyon fontos. Ezek megérdemelnék, hogy egy-egy félre nem érthető szóval fejezzük ki őket. Jobb hiányában ajánlok párat (megadva mindegyikhez a német megfelelőjét).

³ *Philosophische Schriften*, Gerhardt kiadásában, 4. kötet, 278. old.

Megoldási objektum (Lösungsgegenstand): olyan objektum (tárgy, elem), ami a probléma feltételének eleget tesz. Ha a probléma célja algebrai egyenlet megoldása, akkor megoldási objektum egy az egyenletet kielégítő szám, az egyenlet egy gyöke. Csak „meghatározó” problémának lehet megoldási objektuma. Világosan megfogalmazott problémában előre meg kell adnunk azt a kategóriát (halmazt), melyhez a megoldási objektumnak tartoznia kell — előre tudnunk kell, mi az, amit keresünk, háromszög, szám vagy bármi egyéb. A kategóriának ez a megadása (annak a halmaznak a pontos megjelölése, amelyhez az ismeretlen tartozik) a probléma egyik fő része. „Az ismeretlen meghatározása” a megoldási objektumnak (vagy ezek halmazának) a meghatározását (azonosítását, megszerkesztését, előállítását, megkeresését . . .) jelenti.

Megoldási eljárás (Lösungsgang): az az eljárás (szerkesztés, műveletek rendszere, következtetések rendszere), amely akkor fejeződik be, amikor a meghatározó probléma ismeretlenjét meghatároztuk, vagy a bizonyító problémában szereplő állítás körül minden kétséget eloszlattunk. Így hát a „megoldási eljárás” kifejezés mindkét problématípusban alkalmazható. Munkánk kezdetén nem ismerjük a megoldási eljárást, a műveletek megfelelő rendszerét, de folyton keressük, abban a reményben, hogy végül megtaláljuk: ez az eljárás a kutatásunk célja, s valójában, ez a mi ismeretlenünk; azt mondhatjuk, hogy ez az „ismeretlen operátor”. (Lásd az 5.11. példát.)

Beszélhetnénk még „megoldási munkáról” (Lösungsarbeit) és „megoldási eredményről” is (Lösungsergebnis); de nem akarok szörszálhásogató lenni, és néhány fontos eset kivételével inkább az olvasóra bízom, hogy találja ki a szövegből egy-egy adott esetben a „megoldás” szó jelentését: melyik jelenti a tárgyat, az eljárást, a munka eredményét és magát a munkát.⁴

5.14. Adatok és ismeretlen, hipotézis és konklúzió. Euklidész „Elemi”-nek jellegzetesen egyöntetű stílusát vannak akik inkább ünnepélyesnek, vannak akik inkább pedánsnak tartják. Minden állítást egy kaptafa szerint fogalmaz. Fogalmazásában a meghatározó probléma adatait és ismeretlenjeit úgy kezeli, mintha hasonló vagy analóg lenne a probléma hipotéziséhez, illetve konklúziójához. Később látni fogjuk, hogy valóban van bizonyos hasonlóság vagy analógia a két fajta probléma fő részei között, ennek a problémamegoldó — és így a mi mondanivalónk — szempontjából is van némi fontossága. Megengedhetetlen és tudatlanságra valló lenne azonban, ha az adatot a hipotézissel, az ismeretlent a konklúzióval cserélnők össze, és ezeket az elnevezéseket olyan fajta problémákra alkalmaznánk, amelyekre nem illenek rá. Sajnálatos, hogy ezeknek a fontos terminuszoknak ilyen megengedhetetlen és tudatlanságra valló használata néha még nyomtatásban is megjelenik.

5.15. Az adatok számbavétele. Egy háromszöget meghatároz három oldala, vagy két oldala és egy szöge (a közbezárt szög), vagy egy oldala és két szöge, de nem határozza meg három szöge. A háromszög meghatározására három független adat szükséges. (Lásd az 1.43. és 1.44. példákat is.) Egy független változóban (x -ben) n -ed fokú polinom meghatározásához $n + 1$ független adatra van szükség: ez lehet a polinom x hatványai szerinti kifejtésében az $n + 1$ együttható, lehet az az $n + 1$ érték, melyeket a polinom az $x = 0, 1, 2, \dots, n$ pontokban, vagy bármely más, $n + 1$ különböző megadott pontban vesz fel, és így tovább. A matematikai objektumok sok fontos fajtájának definiálásához pontosan meghatározott számú független adat szükséges.

⁴ Lásd G. I. 209. old. Régi és új szakkifejezések.

Ezért, ha meghatározó problémát akarunk megoldani, gyakran érdemes *megszámolni az adatokat*, méghozzá a kezdet kezdetén.

5.16. Az n oldalú poligon meghatározására

$$(n-1) + (n-2) = (n-3) + n = 3 + 2(n-3) = 2n-3$$

független adat szükséges. Mit mond nekünk ugyanannak a számnak ez a négy különböző kifejezése?

5.17. Egy gúla alapja n oldalú sokszög. Hány adat szükséges a gúla meghatározásához?

5.18. Egy hasáb (lehet ferde) alapja n oldalú sokszög. Hány adat szükséges a hasáb meghatározásához?

5.19. Hány adat szükséges egy r számú változóban n -ed fokú polinom meghatározásához? (Tagjai $cx_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_r^{m_r}$ alakúak, ahol c konstans együttható, és

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r \leq n.)$$

6. FEJEZET

AZ ALKALMAZÁSI TERÜLET BŐVÍTÉSE

Ossz fel minden problémát, amelyet vizsgálsz, annyi részre, ahányra lehet és szükséges ahhoz, hogy könnyebben megoldhasd.

DESCARTES: *Oeuvres*, VI. kötet, 18. old; *Discours de la Méthode*, II. Rész.

Descartesnak ez a szabálya mindaddig nem nagyon hasznos, míg a felosztás művészete ... magyarázat nélkül marad ... A gyakorlatlan problémamegoldó csak megnehezíti a dolgát, ha problémáját ügyetlenül osztja fel részekre.

LEIBNIZ: *Philosophische Schriften*, Gerhardts kiad. IV. kötet, 331. old.

6.1. Descartes-féle megoldástípus

A Descartes-féle megoldástípusban fontos módszertani gondolatok vannak, melyek nem kapcsolódnak szükségképpen egyenletek felállításához. E fejezetben megpróbálunk kihámozni belőle néhány elgondolást. Óvatosan fogunk haladni az egyenletektől az általánosabb fogalmak felé. Olyan példából indulunk ki, amely célunknak megfelelően eléggé általános ugyan, de más tekintetben nagyon is konkrét — ez mutatja munkánk irányát.

(1) Bizonyos problémát négy ismeretlenes (x_1, x_2, x_3, x_4) , négy egyenletből álló egyenletrendszerre fordítottunk át. Ennek a rendszernek különleges vonása van: nem mindegyik egyenlet tartalmaz minden ismeretlent. Mi épp ezt a vonást akarjuk kiemelni: jelölésünk világosan mutatja majd, hogy melyik egyenlet melyik ismeretlent tartalmazza, melyiket nem, viszont elhanyagol más részleteket; a négy egyenletet a következő formában írjuk fel:

$$r_1(x_1) = 0$$

$$r_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$r_3(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$r_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Vagyis az első egyenlet csak az első ismeretlent, x_1 -et tartalmazza, a következő két egyenlet három ismeretlent, x_1, x_2, x_3 -at és csak a negyedik, az utolsó, mind a négyet.

Ez a körülmény világos tervet juttat eszünkbe az egyenletrendszer megoldására: kezdjük x_1 -gyel, ezt az első egyenletből számítjuk ki. Ha x_1 értékét már ismerjük, észrevehetjük, hogy a következő két egyenlet olyan egyenletrendszert alkot, amelyből kiszámíthatjuk a következő két ismeretlent, x_2 -t és x_3 -at. Ha már megvan x_1, x_2 és x_3 , felhasználjuk az utolsó egyenletet a negyedik ismeretlen, x_4 kiszámítására.

(2) Tudatosítsuk most azt, hogy a szóban forgó egyenletrendszer valamilyen probléma *feltételét* fejezi ki. Ez a feltétel négy részre oszlik, és minden egyes egyenlet az egész feltétel egy részét (vagy részfeltételét) adja: azt fejezi ki, hogy a benne foglalt ismeretlenek olyan kapcsolatban vannak egymással és az adatokkal, amelyet a feltétel ennek megfelelő része (vagy részfeltétele) előír. A feltételnek az a jellegzetessége, hogy nem minden részfeltétel tartalmaz minden ismeretlent. Jelölésünk világosan megmutatja, hogy melyik részfeltételben melyik ismeretlen szerepel.

Természetes, hogy akkor is éppen ilyen speciális módon bonthatjuk a feltételt részfeltételekre (t. i. hogy minden részfeltétel éppen a jelzett speciális ismeretlenösszeállítást tartalmazza), ha ezeket a részfeltételeket még nem fordítottuk át az egyenletek nyelvére, vagy ha nem is tudjuk őket átfordítani. Ebből már gyaníthatjuk, hogy a fenti (1) alatt vázolt egyenletrendszerre vonatkozó *terv* a részfeltételeknek valamilyen rendszerére bizonyos értelemben még akkor is *érvényben marad*, ha azokat algebrailag nem fejezzük ki, vagy ha nem is lehet kifejezni őket.

Ez a megjegyzés az új lehetőségek tág terét nyitja meg.

(3) Hogy ezeket a lehetőségeket világosabban lássuk, jelöléseinknek új értelmet tulajdonítunk.

Eddig az $r(x_1, x_2, \dots, x_n)$ szimbólumot a szokott módon az ismeretlen x_1, x_2, \dots, x_n számok (a változók) algebrai kifejezéseként (vagy polinomjaként, vagy függvényeként) értelmeztük. Ebben az értelmezésben

$$r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

(például algebrai) egyenlet, amely összekapcsolja az x_1, x_2, \dots, x_n ismeretleneket. Ha olyan problémával van dolgunk, amelyben x_1, x_2, \dots, x_n az ismeretlenek, egy ilyen egyenlet a feltétel egy részét (vagy egy részfeltételét) fejezi ki, vagyis az x_1, x_2, \dots, x_n ismeretlenek és az adatok közötti, a feltétel megkövetelte relációt.

Ezt az értelmezést akkor sem vetjük el, ha a részfeltétel nincs is egyenletre átfordítva, ha x_1, x_2, \dots, x_n még csak nem is ismeretlen számokat, hanem bár-

milyen típusú ismeretleneket jelentenek — csak kiterjesztjük: fejezzen ki

$$r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

szimbolikus egyenlet olyan *relációt*, amelyet a probléma feltétele megkövetel. Mondhatjuk azt is, hogy az ilyen jelképes egyenlet a feltétel egy részét (rész-feltételét, a feltétel megszabta követelményt, megállapítást) fejezi ki.

Hogy tisztán megértsük a jelölés tágabb értelmezését, néhány példára van szükségünk; még további példákra ahhoz, hogy e kiterjesztés hasznosságáról is meggyőződhesünk.

(4) Jól illusztrálhatjuk a most bevezetett jelölést keresztrejtvényekkel. Nézzünk erre (miniatűr) példát.

G	1		5		6
R		■		■	
A	2			A	
D		■		■	
E	3				

Vízszintes

1. Német matematikus
2. Ma is az van
3. Svájci matematikus

Függőleges

1. „dagre” betűi keverve
5. Vártalak a kereszt...
6. „peres” betűi keverve

A keresztrejtvény ismeretlenjei szavak. Jelentse x_1, x_2, \dots, x_6 a rejtvény hat ismeretlen szavát. Az x_1 és x_4 szavak kezdőbetűje ugyanazon 1-es számú négyzetbe tartozik, de x_1 -et vízszintes sorba kell beírunk, x_4 -et pedig függőlegesbe; ha $n = 2, 3, 5$ vagy 6 , akkor x_n azt a szót jelenti, amelynek kezdőbetűjét az n -nel számozott négyzetbe kell beírni. Ha gondosan kielemezzük azokat a feltételeket, melyeket a fehér és fekete, számozott és számozatlan kisebb négyzetekből álló nagyobb négyzet alakú ábra magában foglal, akkor 21 feltételből álló rendszert kapunk.

Ezek közül legfeltűnőbb az a hat, amelyeket a keresztrejtvény meghatározásai fejeznek ki. Jelöljük ezeket rendre:

$$r_1(x_1) = 0, \quad r_2(x_2) = 0, \quad \dots, \quad r_6(x_6) = 0.$$

A szimbolikus $r_1(x_1) = 0$ egyenlet azt a feltételt képviseli, hogy az x_1 szó egy német matematikus (reméljük, vezető-) neve; $r_4(x_4) = 0$ pedig azt, amit a (pillanatnyilag kissé rejtélyes) „dagre” betűi keverve előírás ró ki x_4 -re.

Az ábráról a hat ismeretlen szó hosszára hat feltétel olvasható le:

$$r_7(x_1) = 0, \quad r_8(x_2) = 0, \quad \dots, \quad r_{12}(x_6) = 0.$$

Például $r_7(x_1) = 0$ írja elő az x_1 szó hosszúságát. Ennek a mi esetünkben az az értelme, hogy az x_1, x_2, \dots, x_6 szavak mindegyike ötbetűs szó.

Az ábra azt is mutatja, hogy melyik szó hol, vagy milyen helyen keresztezi a másikat, ez kilenc feltételt ad:

$$\begin{aligned} r_{13}(x_1, x_4) &= 0, & r_{14}(x_1, x_5) &= 0, & r_{15}(x_1, x_6) &= 0 \\ r_{16}(x_2, x_4) &= 0, & r_{17}(x_2, x_5) &= 0, & r_{18}(x_2, x_6) &= 0 \\ r_{19}(x_3, x_4) &= 0, & r_{20}(x_3, x_5) &= 0, & r_{21}(x_3, x_6) &= 0. \end{aligned}$$

Például $r_{14}(x_1, x_5) = 0$ az a követelmény, hogy az x_1 szó harmadik betűje az x_5 szónak kezdőbetűje és így tovább.

Most már felsoroltuk az összes feltételt; számuk $6 + 6 + 9 = 21$.

(5) Általában, ha a probléma n ismeretlent tartalmaz (x_1, x_2, \dots, x_n) , és a feltételt l különböző részre (követelményre, részfeltételre, megállapításra) bontjuk, akkor az n ismeretlent összekapcsoló l relációból álló rendszerünk van. Ezt fejezzük ki az n ismeretlent összekapcsoló l szimbolikus egyenlettel a következőképpen:

$$\begin{aligned} r_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ r_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ r_l(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

A második fejezetben olyan speciális esettel volt dolgunk, amelyben az ismeretlenek: x_1, x_2, \dots, x_n ismeretlen számok, az egyenletek nem csupán jelképesek, hanem valóságos algebrai egyenletek, és $l = n$. Ebben a fejezetben sokszor lesz dolgunk olyan az (1) és (2) alattihoz hasonló speciális esettel, amelyben nem mindegyik részfeltétel tartalmaz minden ismeretlent.

(6) Előfordulhat, hogy két problémát ugyanaz a szimbolikus egyenletrendszer fejez ki. Az ilyen problémák a lehető legváltozatosabbak lehetnek, de mindig van bennük valami közös: valamilyen (inkább elvont) szempontból hasonlóak, ezért ugyanabba az osztályba sorolhatjuk őket. Így a (meghatározó) problémákra új, árnyaltabb osztályozást nyerünk. Vajon munkánk szempontjából van-e jelentősége ennek? Ha két problémát ugyanazzal a szimbolikus egyenletrendszerrel fejezünk ki, van-e olyan megoldási eljárás, amely mindkettőre alkalmazható?

Azt hiszem, ez a kérdés helyénvaló. Teljes általánosságban ugyan nem sokra megyünk vele, de segíthet speciális helyzetek megértésében, amelyekre most mindjárt rátérünk.

6.2. A két mértani hely

Az előző, 6.1. pontban körvonalazott kép nagyon általános. Hogyan illenek előző megfigyeléseink ebbe a képbe? Hogyan illik belé először kialakított megoldástípusunk?

(1) Frappánsabb választ adhatunk, ha terminológiánkat kissé módosítjuk.

Ha szerkesztésekkel foglalkozunk, akkor „mértani helyeket” veszünk tekintetbe. Minden mértani hely pontok valamilyen halmaza, pontthalmaz. A következőkben mértani helynek nevezünk egy halmazt, ha valamilyen jellegzetes, jellemző módon fordul elő a probléma megoldásában. Ha már a „halmaz” elnevezésnek (lásd az 1.51. példát) annyi szinonimája van (osztály, együttes, sokaság, összesség, kategória), indokolatlannak látszik, hogy még mi is hozzátegyünk egyet. A „mértani hely” kifejezés azonban elemi geometriai feladatokkal kapcsolatos tapasztalatainkra emlékeztet, és így az analógia folytán hasznos lépéseket juttat az eszünkbe, amikor más, talán nehezebb feladatokkal foglalkozunk.

(2) *Két mértani hely a sík egy pontjának a meghatározására.* Térjünk vissza ahhoz a példához, amelyet legelőször tárgyaltunk: *Szerkesszünk háromszöget a három oldalából.*

Tekintsünk vissza az ismerős megoldásra (1.2. pont). Amikor megrajzoljuk az a szakaszt, máris megvan a keresett háromszög két csúcsa, B és C . Még csak egy csúcsot kell megtalálnunk. Nevezzük ezt az egyelőre ismeretlen harmadik csúcsot x -nek. A feltétel két dolgot követel meg:

(r_1) az x pont C -től b távolságra,

(r_2) az x pont B -től c távolságra legyen.

A 6.1. pontban bevezetett jelölés felhasználásával a két követelményt, (r_1)-et és (r_2)-t két szimbolikus egyenlettel írjuk fel:

$$r_1(x) = 0$$

$$r_2(x) = 0.$$

Azok az x pontok, melyek az első követelménynek felelnek meg (a két szimbolikus egyenlet közül az elsőnek) egy kör területét töltik ki (középpontja C , sugara b). Ez a körvonal alkotja azon pontok *halmazát* — vagy *mértani helyét* —, melyek teljesítik az (r_1) követelményt. Azoknak a pontoknak a mértani helye, melyek a második (r_2) követelménynek (a második szimbolikus egyenletnek) tesznek eleget, a másik körvonal. Az az x pont, mely a háromszögre vonatkozó feladatunkat megoldja, mindkét követelménynek eleget tesz, mindkét mértani helyhez hozzátartozik. Ezért a megoldások halmaza ennek a két mértani helynek a metszete. Ez a halmaz két pontot tartalmaz: két megoldás van. Két, egymással a BC oldalra szimmetrikus háromszög.

(3) *Három mértani hely a tér egy pontjának meghatározására.* Vizsgáljuk a következő térmértani feladatot, amely analóg az előbb, (2) alatt tárgyalt egyszerű síkmértanival: *Határozzunk meg egy tetraédert a hat éléből.*

A (2) alatt felelevenített eljárással megszerkesztjük a tetraéder alapját, egy háromszöget azokból az élekből, melyek a követelmény szerint ezt a lapot határolják. Az alap elhelyezésével megvan a tetraéder három csúcsa, mondjuk A , B és C . Csak egy csúcsot kell még megtalálnunk. Nevezzük ezt az egyelőre ismeretlen, negyedik csúcsot x -nek, és a három már rögzített csúcstól megadott távolságát a , b és c -nek. A feltétel ettől az x ponttól három dolgot követel meg:

(r_1) az x pont A -tól a távolságra,

(r_2) az x pont B -tól b távolságra,

(r_3) az x pont C -tól c távolságra legyen.

A 6.1. pontban bevezetett jelölés felhasználásával az (r_1), (r_2), (r_3) követelményeket három szimbolikus egyenletben írjuk fel:

$$r_1(x) = 0$$

$$r_2(x) = 0$$

$$r_3(x) = 0.$$

Az első követelménynek (az első szimbolikus egyenletnek) eleget tevő x pontok egy gömb felszínét töltik ki (középpontja A , sugara a). Ez a gömbfelület alkotja azoknak a pontoknak a halmazát, vagy mértani helyét, amelyek teljesítik az első, (r_1) követelményt. A másik két követelménynek megfelelő x pontok mértani helye is egy-egy gömbfelület. Az az x pont, mely a tetraéderre vonatkozó feladatot megoldja, mind a három követelményt kielégíti, mind a három mértani helyhez hozzátartozik. A megoldások halmaza a három mértani helynek (a három gömbnek) a metszete. Ez a halmaz két pontot tartalmaz: két megoldás van, két tetraéder, egyik a másikhoz az ABC háromszög síkjára nézve szimmetrikus.

(4) *Mértani hely általános értelemben vett objektum meghatározására.* A (2) és (3) alatt tárgyalt példák más feladatokra is emlékeztethetnek, amelyeket az I. fejezetben ugyanezt a típust követve oldottunk meg. E példák háttérében kivehető az általános helyzet.

Egy probléma ismeretlenje x . A probléma feltétele l részre oszlik, amelyet l szimbolikus egyenletből álló egyenletrendszerrel fejezünk ki:

$$r_1(x) = 0, \quad r_2(x) = 0, \quad \dots, \quad r_l(x) = 0.$$

Az első részfeltételt az első szimbolikus egyenlet fejezi ki. Azok az objektumok, amelyek teljesítik ezt a részfeltételt, valamilyen halmazt alkotnak. Nevezzük ezt a halmazt az első mértani helynek. A második részfeltételnek eleget tevő objektumok a második, az utolsónak eleget tevő objektumok az l -edik mértani helyet alkotják. Az az x objektum, amely megoldja a felvetett problémát,

kielégíti az egész feltételt, vagyis mind az l részfeltételt, és így mind az l mértani helyhez hozzátartozik. Másrészt, minden x objektum, amely egyidejűleg az l mértani helyhez tartozik, kielégíti az összes (l) részfeltételt, tehát az egész feltételt, és így egyben a felvetett problémának megoldása. Röviden, a megoldások halmaza az l mértani hely halmazelméleti értelemben vett *metszete* (közös része), pontosan ez mindazon objektumok halmaza, amelyek a felvetett probléma teljes feltételét kielégítik.

Így a két mértani hely megoldástípusának széles körű általánosításához jutottunk. Ez a módszer kimeríthetetlenül sok és változatos esetben alkalmazható, úgyszólván minden problémára. Először bontsuk fel a feltételt megfelelő részfeltételekre, azután készítsük el a különböző részfeltételeknek megfelelő mértani helyeket, végül határozzuk meg a megoldások halmazát, ezeknek a mértani helyeknek a metszetét. Mielőtt ítéletet mondanánk erről a nagyon általános módszerről, vegyünk szemügyre két konkrét esetet.

(5) *Két mértani hely egy egyenes meghatározására.* Szerkesszünk háromszöget, ha adott r , m_a és α .

Az olvasónak vissza kell emlékeznie az I. fejezetben használt jelölésre: legyen r a háromszögbe beírható kör sugara, m_a az a oldalhoz tartozó magasságvonal és α az a oldallal szemben fekvő szög.

A probléma nem túl könnyű, de vannak nyilvánvaló kezdő lépések. *Megoldhatjuk-e a probléma valamelyik részét?* Könnyű megrajzolni a keresett alakzat egyik részét: r sugarú kört és két olyan érintőjét, amelyek α szöget zárnak be. (Figyeljük meg, hogy a két érintési ponthoz húzott sugarak $180^\circ - \alpha$ szöget alkotnak.) Az α szögnek a csúcsa a keresett háromszög A csúcsa. Így a problémát olyan (végtelen) egyenesnek a megszerkesztésére vezettük vissza, amelynek szakasza az A -val szemben levő oldal. Ez az egyenes, mondjuk x , a mi új ismeretlenünk; az alakzatnak az x része pedig, melyet megszerkesztettünk, most már az adatokhoz tartozik.

Az x egyenesre vonatkozó feltétel két részből áll:

(r_1) az x egyenes az r sugarú, már megszerkesztett kör érintője,

(r_2) az x egyenes m_a távolságra van az adott A ponttól.

Az első mértani hely: az r sugarú kör érintőinek halmaza.

A második mértani hely: ismét körérintők halmaza; a kör középpontja A , és a sugara m_a .

E két mértani helynek a közös részét a két kör közös érintői alkotják, amelyeket meg tudunk szerkeszteni [lásd az 1.6.(1) pontot és az 1.32. példát].

(Tulajdonképpen csak a körök külső érintői oldják meg a kitűzött problémát. A belső közös érintők, melyek esetleg nem is léteznek, az r sugarú kört hozzáírt körre tennék.)

Hasznos gondolat, hogy két kör közös érintőit *két, egyenesekre vonatkozó mértani hely közös részének tekintjük*. Még hasznosabb, ha belefoglaljuk a hasonló eseteket is, különösen azt a határesetet, amelyben az egyik kör ponttá fajul.

(6) *Három mértani hely egy test meghatározására*. Tervezzünk olyan „sok mindenre használható dugót”, amelyek pontosan beleillik három különféle lyukba: kör, négyzet és háromszög alakúba.

Lásd a 6.1. ábrát: a kör átmérője, a négyzet oldala és az egyenlő szárú háromszög alapja és magassága egymással egyenlőek.

Mértani kifejezéssel, a keresett test három merőleges vetülete megegyezik a három megadott alakzattal. Feltételezzük (bár ezzel leszűkítjük a problémát), hogy a három vetület egymásra merőleges. A mi ismeretlenünk valamilyen test, mondjuk x , és a problémánk feltétele három részből áll:

(r_1) az x test vetülete a padlón kör,

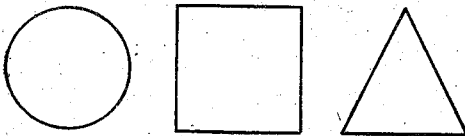
(r_2) az x test vetülete a homlokzati oldalfalon négyzet,

(r_3) az x test vetülete a homlokzati fal szomszédos oldalfalon egyenlő szárú háromszög.

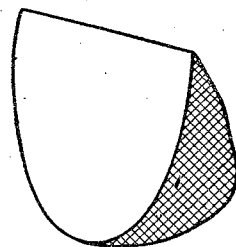
Magától értetődik, hogy az x testet a szokásos téglalap alakú szobában helyeztük el, a vetületek merőlegesek, és a 6.1. ábrában szereplő három alakzat méretei a már említett módon függnek össze.

Vizsgáljuk az első mértani helyet, azaz az első követelménynek, (r_1)-nek eleget tevő testek halmazát. Az adott kört a padlóra helyeztük. Képzeljünk el olyan (végtelen) függőleges egyeneseket, amelyek áthaladnak a körlepton, és merőlegesek rá. Nevezzük ezeket „alkotóknak”. Az alkotók végtelen körhengeret töltenek ki, amelynek a megadott kör az egyik (merőleges) keresztmetszete. Valamilyen x test akkor tesz eleget az első, (r_1) követelménynek, ha benne van a hengerben, és mindegyik alkotóval van legalább egy közös pontja. Az összes ilyen test halmaza az első mértani hely.

A másik két mértani hely ugyanolyan kapcsolatban van egy-egy vízszintes végtelen hasábal, amilyenben az első a függőleges végtelen hengerrel. Az (r_2)-nek megfelelő hasáb keresztmetszete négyzet. Ha ez a hasáb észak-déli irányú, akkor az (r_3)-nak olyan hasáb felel meg, amelynek háromszög alakú keresztmetszete van, és ékelet-nyugat irányban fekszik.



6.1. ábra. Három lyuk, amelybe a dugó beleillik



6.2. ábra. A legjobb dugó

A problémának megoldása, tehát „sok mindenre használható dugó” az összes olyan x test, amely mind a három mértani helyhez hozzátartozik. A legterjedelmesebb ilyen fajta test a három végtelen alakzatnak — hengernek és két hasábnak — a közös része (vázlatát lásd a 6.2. ábrában).

(Miért ez a legnagyobb? Milyen részekből áll a felszíne? Milyen más testek tartoznak még a megoldások közé?)

(7) *Két mértani hely egy szó meghatározására.* Egy keresztrejtvényben, mely szójáték is, anagramma (betűcsere) is, a következő kulcs található:

„Zárszava ebben a formában nem dönt, csak segít (8 betű)”.

Ravasz kis mondás ez, mert azt az értelmet akarja elfogadtatni velünk, hogy „bár kimondta az utolsó szót, és bár az segít is, mégse döntötte el a vitát”. Fel kell tételeznünk, hogy ebben a rejtvényben van valami olyan, ami félrevezethet. Az „ebben a formában” kifejezés mintha anagrammára utalna. Így hát értelmezzük rejtvényünket a következőképpen:

az ismeretlen: x , egy szó. A feltételnek két része van:

(r_1) az x a ZÁRSZAVA szónak az anagrammája (ugyanabból a 8 betűből áll; a kettős betűt két betűnek vesszük);

(r_2) az x szó „nem dönt, csak segít”, valamilyen átvitt értelmű mondás.

Vizsgáljuk meg a feladatnak ezt az értelmezését. A feltétel áttekinthetően két részre oszlik. (r_1) a szó betűire vonatkozik, (r_2) az értelmére. Mindkettőnek megfelel egy-egy mértani hely — csak hogy ezek kevésbé könnyen kezelhetők, mint azok, amelyek az előző esetekben fordultak elő.

Az első mértani hely önmagában véve is világos. A nyolc betű

A A Á R S V Z Z

10 080 különbözőféleképpen rendezhető el (az olvasónak felesleges utána számolnia; egyébként $8!/2!2!$). Ha feltétlenül szükséges volna, felírhatnánk a betűk 10 080 különböző elrendezését anélkül, hogy bármelyiket megismételnénk vagy kihagynánk. Ezzel kimeríthetnénk az (r_1) részfeltétel adta lehetőségeket, hiánytalanul felírunk vagy előállítanánk a megfelelő mértani helyet.

Ez azonban nagyon unalmas lenne, és szörnyű időpocsékolás is. (Bőven írunk fel olyan magán- és mássalhangzó-kapcsolatokat is, amelyek soha nem fordulhatnak elő a magyar nyelvben.) Továbbá — az eseteknek ez a gátló kimerítése nem is felelne meg az eredeti szándéknak — nem felelne meg a

játék szellemének. Így az (r_1) -nek megfelelő mértani hely elvben ugyan nem kimeríthetetlen és nem kezelhetetlen, de a gyakorlatban igen.

Az (r_2) -nek megfelelő mértani hely nemcsak kimeríthetetlen, de bizonyos fokig homályos is. Olyan x magyar szó kerestetik, melyre az „ x nem dönt, csak segít” mondásnak van értelme. Ez a mondás szokásos-e? Legtöbb esetben kétes értékű erre a válasz.

És így eltérő okokból ugyan, de egyik mértani hely sem kezelhető könnyen. Egyiket sem lehet kényelmesen felírni, áttekinteni vagy előállítani. Természetesen arra sincs lehetőségünk, hogy a két mértani hely közös részét elkészítsük. Mégis segítségünkre lehet, ha tudatosítjuk, hogy a feltételnek két részfeltétele van, és a keresett szónak mindkettőt ki kell elégítenie. Ha ezután hol az egyikre, hol a másikra összpontosítjuk a figyelmünket, ha olyan szavakon törjük az eszünket, amelyek majdnem teljesítik az egyik vagy a másik részfeltételt — egy próbaszúrás ebbe, vagy abba az irányba —, ezek esetleg szókinszünket, emlékezőtehetségünket eléggé megmozgatják ahhoz, hogy a kívánt szó felbukkanjon.

(Hangsúlyoztuk, hogy sem az (r_1) , sem az (r_2) részfeltétel nem kezelhető jól — ez fontos az általános terv értékelésénél. Valójában az egyik a kettő közül valamivel kezelhetőbb lehet, mint a másik, és ez a szóban forgó kis rejtvény megoldásában hasznunkra lehet.)

6.3. Melyik részfeltétellel kezdjük?

Az előző pontban különféle problémákról beszéltünk, és mindegyiket ugyanazon típus szerint oldottuk meg, nevezzük ezt „az 1 mértani hely megoldástípusának”: — Ám a 6.2.(7) pont utolsó feladatát mégsem oldottuk meg. Mi volt nehéz? Egészen szépen sikerült a feltételt két részre bontanunk, de kudarcot vallottunk a részfeltételeknek megfelelő mértani helyek elkészítésével. Nem tudtuk kimeríteni, sőt leírni sem ezeket a mértani helyeket, és így nem állíthattuk elő közös részüket sem.

Olyan esetek is vannak, melyekben felmerülnek ezek a nehézségek, de nem ilyen ijesztő alakban, és ezért meg tudunk birkózni velük.

(1) *Két mértani hely egy szó meghatározására.* Rejtvényünkben, amely szójátékot és betűcserét (anagrammát) is megenged, a következő fogas kérdést találjuk:

„Mindkét oldalról gömbölyű (5 betű).”

Némi próbálgatás a következő értelmezéshez vezet: az ismeretlen, x egy szó. A feltétel két részből áll:

(r_1) , x jelentése „gömbölyű”;

(r_2) , x szó 5 betűs, amely visszafelé olvasva is „gömbölyűt” jelent.

Melyikkel kezdjük a kettő közül? Micsoda különbség! Hogy az (r_2) részfeltételt eredményesen kezeljük, fejünkben kellene tartanunk azoknak az öt-betűs szavaknak a jegyzékét, amelyeknek visszafelé olvasva is ugyanaz az értelme. Hát bizony nagyon kevés ember akad, akinek ilyen jegyzéke van. Viszont közülünk a legtöbbszörnek eszébe jutnak olyan szavak, amelyeknek többé-kevésbé az a jelentése, mint a „gömbölyűnek”. Ha ilyenek felötlenek, meg kell vizsgálnunk, hogy az (r_2) -nek is eleget tesznek-e. Pár ilyen szó:

gömbölyű, gömbölyded, golyó alakú, kör alakú, kör, kerék — természetesen **KEREK!**¹

(2) Bogozzuk ki az előző eljárás leglényegesebb vonását.

Az (r_1) részfeltétel az összes szavak óriási kiterjedésű állagából kis részhalmazt válogat ki, néhány szót, ezek között van a megoldás. Ugyanezt teszi az (r_2) részfeltétel is, de bizonyos eltéréssel: az egyik esetben könnyebb a válogatás, mint a másikban. A könnyebben kezelhető (r_1) részt használtuk fel az első kiválogatáshoz, és a kevésbé kezelhető (r_2) -t az ezután esedékes másodikhoz. Fontosabb, hogy az első válogatás legyen sikeres. Először az összes szavak hatalmas tömegéből válogatjuk ki az objektumokat, másodszor az első válogatásból származó, sokkal szűkebb halmazból.

A tanulság egyszerű: Minden feltételrésznek megfelel egy mértani hely. *Kezdjük mindig azzal a feltételrészszel, amelynek megfelelő mértani helyet minél teljesebben, minél hatékonyabban meg tudjuk formálni.* Lehet, hogy akkor a többi résznek megfelelő mértani helyet már meg sem kell alkotnunk. Ezeket a részfeltételeket csak arra használjuk fel, hogy az első mértani helyből keressük ki a megfelelő elemeket.

(3) *Két mértani hely három összetevőjű ismeretlen meghatározására.* Hány éves a kapitány, hány gyermeke van, és milyen hosszú a hajója? Adott a három keresett (egész) szám szorzata: 32118. A kapitány életkora 100-nál kevesebb, de gyermekei számánál több; vannak fiai is, lányai is; a hajó hossza méterben van kifejezve (egy méternél mindenestre hosszabb).

Ez a rejtvény három szám meghatározását adja fel: a kapitány

gyermekeinek száma	életkora	hajójának hossza
x	y	z

Előnyös lenne így felfogni a problémát: csak egy ismeretlenünk van; ez azonban nem egy szám, hanem három összetevőjű ismeretlen, egy (x, y, z) számhármás.

¹ G. I. Felbontás és összerakás. 8., 120–121. old. Igen hasonló példát tartalmaz, és megelőzi ennek a fejezetnek a gondolatmenetét.

Nagyon fontos, hogy a feltételt, melyet a probléma megfogalmazása fejez ki, alkalmas részekre bontsuk. Ehhez a részletek gondos mérlegelése és lényeges átcsoportosítása szükséges. Több próbálkozás után (ezeket helymegtakarításból mellőzzük) a következő részfeltételekhez jutunk:

(r_1) ; x , y és z olyan 1-től különböző pozitív egész számok, amelyekre

$$xyz = 32\,118$$

(r_2)

$$4 \leq x < y < 100.$$

Melyikkel kezdjük a kettő közül? Természetesen (r_1) -gyel, hiszen ez véges számú lehetőséget ad, (r_2) ellenben z -re nem tartalmaz korlátot, és így végtelen sok lehetőséget hagy nyitva.

Vizsgáljuk tehát az (r_1) -et. 32 118 osztható 6-tal, ebből kiindulva könnyen törzstényezőkre bontjuk:

$$32\,118 = 2 \times 3 \times 53 \times 101.$$

Három tényezőre bontáshoz a négy törzsszámból kettőt össze kell szoroznunk. Ezért a 32 118-at csak hatféleképpen bonthatjuk három, 1-től különböző tényező szorzatára.

$$6 \times 53 \times 101$$

$$3 \times 101 \times 106$$

$$3 \times 53 \times 202$$

$$2 \times 101 \times 159$$

$$2 \times 53 \times 303$$

$$2 \times 3 \times 5353$$

Ebből a hat lehetőségből a hátralevő (r_2) követelmény az elsőt kivéve mindegyiket elveti, és így

$$x = 6, \quad y = 53, \quad z = 101.$$

A kapitánynak 6 gyermeke van, 53 éves, és hajója 101 m hosszú. Ennek az egyszerű fejtörőnek az „alapgondolata” gyakran alkalmazható még bonyolultabb esetekben is: a teljes feltételből válasszunk ki olyan *primér (elsődleges) részt*, amely csak, kisszámú lehetőséget hagy nyitva, és a feltétel megmaradt, *szekunder (másodlagos) részének* segítségével válogassunk ezen lehetőségek közt.²

*⁽⁴⁾ *Két mértani hely egy függvény meghatározására.* A matematikai problémák nagyon fontos fajtájában, mely a fizikus és a mérnök munkájában mindennapos, a feltétel természetes módon bontható két részre: függvényt kell meghatározunk differenciálegyenletből és kezdő, más szóval határfeltételekből.

² Lásd 2.69., 270., 271. példákat.

Egyszerű példa erre: az x ismeretlen a független változónak, t -nek függvénye; eleget kell tennie az

(r_1) $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, t)$ differenciálegyenletnek, ahol $f(x, t)$ adott függvény, valamint a következő kezdőfeltételeknek:

$$(r_2) \quad x = 1, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \text{ha} \quad t = 0.$$

Kezdjük a differenciálegyenlettel, vagy a kezdőfeltételekkel? Ez az adott $f(x, t)$ függvény természetétől függ.

Első eset. Legyen $f(x, t) = -x$, így:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x.$$

Ez a differenciálegyenlet ahhoz a kevés kivételes típusúhoz tartozik, amelynek explicit formában felírhatjuk az „általános integrálját”. A differenciálegyenletet kielégítő legáltalánosabb függvény

$$x = A \cos t + B \sin t,$$

ahol A és B tetszőleges konstansok (integrációs állandók). Így megkaptuk az (r_1)-nek megfelelő „mértani helyet”.

Most már áttérhetünk az (r_2)-re, melyet arra használunk fel, hogy az előbbi mértani helyből kiszedjük a megoldást: az x és $\frac{dx}{dt}$ kifejezésbe behelyettesítjük $t = 0$ -t; a kezdő feltételekből az adódik, hogy

$$A = 1, \quad B = 0, \quad x = \cos t.$$

Második eset. Megvizsgáljuk a differenciálegyenletet, de nem sikerül általános integrálját (vagy integráljai közül akár csak egyet is) meghatározni. Le is mondunk arról, hogy ebben az irányban további lépéseket tegyünk. Mi a következő lépés? A két rész, (r_1) és (r_2) közül most már melyikkel kezdjük?

Ilyenkor érdemes lehet először (r_2)-t felhasználni: x -et t szerinti hatvány-sorba fejtjük; első együtthatóit a kezdőfeltételek adják meg; a hátralevő együtthatók, u_2, u_3, u_4, \dots munkánknek ebben a szakaszában még határozatlanok (valójában ezek a mi ismeretlenjeink, lásd a 3.81. példát):

$$x = 1 + u_2 t^2 + u_3 t^3 + u_4 t^4 + \dots$$

Így bizonyos értelemben meghatároztuk az (r_2)-nek megfelelő mértani helyet. Most már áttérünk (r_1)-re, az első részfeltételre. A differenciálegyenletből megkapjuk a hátralevő együtthatókat, u_2, u_3, u_4, \dots -et (ha lehet, rekurzióval, lásd újra a 3.81. példát).

Vegyük figyelembe, hogy a differenciálegyenlet mindenestre „szelektívebb” (a függvény kiválasztását sokkal jobban leszűkíti), mint a kezdőfeltételek.

Most például (r_2) a hatványsornak csak két együtthatóját, a differenciálegyenlet [az (r_1) feltétel] pedig a még megmaradó együtthatók végtelen sorozatát határozza meg. Ez viszont azt mutatja, hogy nem mindig a szelektívebb feltételrészszel érdemes kezdeni.

6.4. Rekurzió

Az előző pontban megfigyeltük, hogy részfeltétel és részfeltétel között milyen lényeges különbségek lehetnek: milyen érvek, sőt erős érvek szólhatnak amellett, hogy inkább az egyik részfeltétellel kezdjük a munkát, mint a másikkal. Igaz viszont, hogy korlátozással éltünk: egyismeretlenes esetet vizsgáltunk. (Ez a korlátozás a valóságban nem is hat korlátozóan; lásd az 5.5. pontban az erre vonatkozó megjegyzést.) Lássuk tehát most a több ismeretlen esetét.

(1) Van egy fontos általános eset, s ehhez tartozik a 3. fejezetben tárgyalt több példánk is. Van n ismeretlenünk, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, és ezek kielégítik a következő alakú n feltételt:

$$r_1(x_1) = 0$$

$$r_2(x_1, x_2) = 0$$

$$r_3(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$r_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$$

Az n összefüggésnek ez a speciális rendszere nemcsak arra ad útbaigazítást, hogy hol kezdjünk, hanem arra is, hogyan menjünk tovább. Egész haditervet ad a kezünkbe: kezdjük x_1 -gyel, határozzuk meg az első relációból. Ha megkaptuk x_1 -et, határozzuk meg x_2 -t a második relációból. Ha megkaptuk x_1 és x_2 -t, akkor határozzuk meg x_3 -t a harmadikból, és így tovább: határozzuk meg $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ismeretleneket egyenként, indexük sorrendjében, mindig felhasználva a már megkapott értékeket a következő ismeretlen kiszámításában. Különösen jól beválik ez, ha a k . reláció alakja

$$r_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) = 0,$$

amiből x_k -t az x_1, x_2, \dots, x_{k-1} -gyel fejezzük ki, ha $k=1, 2, 3, \dots, n$. Ez a helyzet különösen előnyös, ha a k egyenlet lineáris az x_k -ban (melynek együtthatója — természetesen — ne tűnjék el).

A *rekurzió*nak ez a megoldástípusa: x_k -t úgy határozzuk meg, hogy visszatérünk, illetőleg hivatkozunk az előzőleg megkapott x_1, x_2, \dots, x_{k-1} -re.

Ha ezt a megoldástípust követjük, egyszerűen lépcsőről lépésre haladunk előre; kezdjük x_1 -gyel, x_1 után vesszük x_2 -t, x_2 után x_3 -t és így tovább, ami a legnyilvánvalóbb, a legtermészetesebb dolognak tűnik, amit csak tenni lehet.

Mindegyik lépés kihasználja az előzőekben már megszerzett ismereteket — talán ez a legjellemzőbb vonása ennek a megoldástípusnak. Néhány példa után ezt még világosabban fogjuk látni.

(2) A 2.5.(3) pont 7 ismeretlenjéhez 7 egyenletből álló egyenletrendszert kapunk. Változtassuk meg az ismeretlenek jelölését a következőképpen:

$$\begin{aligned} D &= x_7 \\ a &= x_4 & b &= x_5 & c &= x_6 \\ p &= x_1 & q &= x_2 & r &= x_3 \end{aligned}$$

Írjuk fel újra az egyenletrendszert; fejezzük ki pontosan, melyik ismeretlen melyik egyenletben szerepel, de tekintsünk el minden más részlettől. Számozzuk meg az egyenleteket. A számozásból világosan tűnjön ki az, hogy milyen sorrendben akarunk haladni.

Így a következő relációrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} r_1(x_2, x_3) &= 0 \\ r_2(x_3, x_1) &= 0 \\ r_3(x_1, x_2) &= 0 \\ r_4(x_2, x_3, x_4) &= 0 \\ r_5(x_3, x_1, x_5) &= 0 \\ r_6(x_1, x_2, x_6) &= 0 \\ r_7(x_4, x_5, x_6, x_7) &= 0 \end{aligned}$$

Ez az elrendezés nyilván a következő tervre készlet: válasszuk el az első három összefüggést a többtől. Ezek csak az első három, x_1, x_2, x_3 ismeretlent tartalmazzák, lesz tehát három egyenletünk három ismeretlenre. [Egyébként könnyen kifejezhetjük $x_1 = p$, $x_2 = q$, $x_3 = r$ -t a 2.5.(3) pontban adott három egyenletből is, amelyeket itt a három első összefüggés jelöl.] Ha már meghatároztuk a három első, x_1, x_2, x_3 ismeretlent, a rendszer „rekurzívva lesz”: megkapjuk x_4, x_5, x_6 -ot, minden egyes ismeretlent a vele megegyezően számozott relációból. (Lényegében nem számít, hogy ezt a három ismeretlent milyen sorrendben vesszük.) Ha meghatároztuk x_4, x_5, x_6 -ot, az utolsó kapcsolatot arra használjuk fel, hogy megkapjuk x_7 -et [mely az eredeti példa ismeretlenje, lásd a 2.5.(3) pontot; a többi csak segédismeretlen].

Az olvasó hasonlítsa össze a most vizsgált rendszert a 6.1.(1) pontban tárgyalttal.

(3) *Oldjuk meg az*

$$(ok)^2 = sok$$

egyenletet.

ok és so természetesen közönséges számok (pozitív egész számok), a szokott tízes számrendszerben írva. Az egyik kétjegyű, a másik háromjegyű, o , k és s a számjegyek. Fogalmazzuk meg újra a problémát aprólékos pontossággal: keressünk olyan o , k és s számokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$(10o + k)^2 = 100s + 10o + k,$$

ahol o , k és s egész számok, $1 \leq o \leq 9$, $0 \leq k \leq 9$, $1 \leq s \leq 9$.

Ez a kis fejtörő nem is nehéz. Ha az olvasó már önállóan megoldotta, akkor jobban tudja majd értékelni a következő leírást. A kezdő fázisban csak egyetlen ismeretlent vizsgálunk. A következőben még egyet bevezetünk, és a két ismeretlent együtt vizsgáljuk. Csak az utolsó fázisban foglalkozunk mind a hárommal.

(k) fázis. Kezdjük k -val, minthogy van egy csak k -ra vonatkozó követelmény: k^2 utolsó jegye k . Felsoroljuk a tíz számjegy négyzetét

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81,$$

és azt találjuk, hogy a tízből csak négy teljesíti ezt a követelményt, tehát

$$k = 0, \text{ vagy } 1, \text{ vagy } 5, \text{ vagy } 6.$$

(k, o) fázis. Olyan követelmény is van, amely a három számjegyből kettőre vonatkozik, k -ra és o -ra:

$$100 \leq (ok)^2 < 1000.$$

Ebből könnyen következtethetjük, hogy

$$10 \leq ok \leq 31.$$

A megelőző, (k) megállapítással egybevetve, azt találjuk, hogy a kétjegyű ok szám a következő tíz szám közül az egyik:

$$\begin{array}{cccc} 10 & 11 & 15 & 16 \\ 20 & 21 & 25 & 26 \\ 30 & 31 & & \end{array}$$

(k, o, s) fázis. Soroljuk fel az előbbi tíz szám négyzetét:

$$\begin{array}{cccc} 100 & 121 & 225 & 256 \\ 400 & 441 & 625 & 676 \\ 900 & 961 & & \end{array}$$

Látjuk, hogy csak egy teljesíti a feltételt. Így

$$\begin{aligned} k &= 5, & o &= 2, & s &= 6 \\ (25)^2 &= 625. \end{aligned}$$

(4) A megelőző, (3) alponthan a feltételt három részre osztottuk. A 6.1.-ben bevezetett jelöléssel a részfeltételeket három szimbolikus egyenletből álló egyenletrendszer írja le:

$$\begin{aligned}r_1(k) &= 0 \\r_2(k, o) &= 0 \\r_3(k, o, s) &= 0\end{aligned}$$

Hasonlítsuk most össze ezt a három részfeltételből álló rendszert a következő három lineáris egyenletből álló egyenletrendszerrel:

$$\begin{aligned}a_1x_1 &= b_1 \\a_2x_1 + a_3x_2 &= b_2 \\a_4x_1 + a_5x_2 + a_6x_3 &= b_3\end{aligned}$$

ahol x_1, x_2, x_3 az ismeretlenek, $a_1, a_2, \dots, a_6, b_1, \dots, b_3$ adott számok, a_1, a_3 és a_6 különböznek 0-tól.

A két rendszer hasonlósága nyilvánvalóbb, mint különbözőségük; hasonlítsuk gondosan össze.

Vegyük előbb az x_1, x_2, x_3 -ra vonatkozó lineáris egyenletrendszert. Az első egyenlet tökéletesen meghatározza az első, x_1 ismeretlent, a következő egyenletek x_1 értékét, melyet az elsőből már megkaptunk; semmi tekintetben nem befolyásolhatják, nem is módosíthatják. x_1 -nek ezt az értékét felhasználva a második egyenlet tökéletesen meghatározza a második ismeretlent, x_2 -t.

Az a három részfeltételből álló rendszer, amelyre a k, o és s ismeretlenekre vonatkozó feltételt felosztottuk, alakilag hasonló, de tartalmában különbözik az x_1, x_2, x_3 -ra felírt egyenletrendszertől. Az első részfeltétel nem határozza meg teljesen az első ismeretlent, k -t, csak lecsökkenti a k -ra vonatkozó választást, *mértani helyet* (ez itt a legáltalálóbb kifejezés) szolgáltat k számára. Hasonlóan nem határozza meg a második részfeltétel sem teljesen a második, o ismeretlent, hanem mértani helyet ad a két ismeretlenből álló (k, o) párra. Csak az utolsó részfeltétel végzi el a végleges meghatározást: kiemeli az előzőleg megállapított mértani helyből az egyetlen hármast, (k, o, s) -t, amely az egész feltételt teljesíti.

6.5. Lépésről lépésre határozzuk meg az ismeretlent

Ha n számú numerikus ismeretlenünk van, x_1, x_2, \dots, x_n , ezeket egy sok összetevőjű x ismeretlen egymás utáni komponenseinek tekinthetjük (lásd az 5.5. pontot). Nézzük ilyen szemmel azt az n ismeretlent, amelyeket valamilyen rekurzív egyenletrendszerből sorban egymás után meghatározunk, ahogy a 6.4.(1) pontban tárgyaltuk. A megoldás rekurzív eljárása sok összetevőjű ismeretlenünket lépésről lépésre, fokról fokra adja meg. Eleinte kevés tájékoztatást

kapunk az ismeretlenről, egyetlen komponens, x_1 értékét. Ha ezt az első tájékoztatást hasznunkra fordítjuk, többet is elérünk: a második, x_2 komponens ismeretét hozzátehetjük az elsőhöz. Munkánk minden egyes fázisában eggyel több komponens ismeretét adhatjuk az előzőekben már megszerzett ismeret-höz, minden egyes fázisban arra használjuk fel az addigi tájékoztatást, hogy újabbakat szerzünk hozzá. A birodalmat tartományonként foglaljuk el, a hadjárat minden szakaszán hadműveleti *támaszpontként* használva fel az addig meghódított tartományokat a következő tartomány ellen.

Láttunk olyan eseteket is, ahol ez az eljárás többé-kevésbé módosult. A tartományokat nem mindig egyenként hódítjuk meg. A hadvezér néha nagyobb falatot kap be, két-három tartományt egyszerre [lásd a 6.4.(2) és 6.1.(1) pontokat]. Esetleg valamelyiket nem tudja egy csapásra meghódítani. Előbb egyik, aztán a másik tartománynak a részeit foglalja el, és az utolsó, sikeres hadmozdulattal egyszerre mindegyiket megszerzi; lásd 6.4.(3) pontot.

Találkozhattunk az eljárás más változataival is eddigi tapasztalatainkban. Arra is volt alkalmunk, hogy alaposan megfigyeljük a fokozatos birtokbavétel jellegzetességeit (lásd a 2.7. pontot). Ha az ismeretlennek sok a komponense (mint a keresztrejtvényekben), akkor egyszerre többfelé is utat kell esetleg törnünk. Nem kell mindenünket egy szögre akasztanunk, tehetjük azt több szögre is. Egyetlen dolog lényeges: *a már összegyűjtött tudást használjuk fel támaszpontként további ismeretek megszerzésére*. Talán azt lehet mondani, hogy a problémamegoldás és a tanulás összes racionális eljárásai ebben az értelemben véve rekurzívak.

Példák és megjegyzések a 6. fejezethez

6.1. Egy feltétel sok részfeltétellel. A *bűvös négyzet* n sorában n^2 szám van elhelyezve úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban a számok összege ugyanakkora; ez az összeg a *bűvös négyzet* „állandója”. A legegyszerűbb és legjobban ismert *bűvös négyzet* 3 sorból áll, és az első kilenc természetes szám, 1, 2, ..., 9 tölti ki. Ennek az előállítását tűzzük ki feladatul, és fejtjük ki a problémának a legpróbb részleteit is.

Mi az ismeretlen? Kilenc ismeretlen van; jelöljük x_{ik} -val az i -edik sornak és a k -adik oszlopnak megfelelő számot; $i, k = 1, 2, 3$.

Mi a feltétel? A feltételnek négy különböző típusú része van:

(1) x_{ik} egész szám

(2) $1 \leq x_{ik} \leq 9$

(3) $x_{ik} \neq x_{ji}$, kivéve, ha $i = j$ és $k = l$

(4) $x_{11} + x_{12} + x_{13} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$, ha $i = 1, 2, 3$

$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$, ha $k = 1, 2, 3$

$x_{13} + x_{22} + x_{31} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$

Állapítsuk meg minden egyes típusba tartozó részfeltétel és az összes részfeltétel számát. Milyen jellegű szimbolikus egyenletekkel fejezhetők ki a részfeltételek, ha a 6.1.(3) pont jelöléseit alkalmazzuk?

6.2. Több összetevőjű ismeretlen bevezetésével vezessük vissza a 6.1.(5) pontban vizsgált általánosabb rendszert a 6.2.(4) pontban tárgyalt (láthatóan speciálisabb) rendszerre.

6.3. Több összetevőjű ismeretlen bevezetésével vezessük vissza a 6.1.(1) pontban vizsgált rendszert a 6.4.(1) pont speciális esetére.

6.4. Alakítsuk át a 6.4.(2) pontban vizsgált rendszert a 6.3. példa mintájára.

6.5. Készítsünk tervet a következő rendszer megoldására:

$$r_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$r_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$r_3(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$r_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

$$r_5(x_1, x_2, x_3, x_5) = 0$$

$$r_6(x_1, x_2, x_3, x_6) = 0$$

$$r_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 0$$

6.6. A következő relációk rendszere:

$$r_1(x_1) = 0$$

$$r_2(x_1, x_2) = 0$$

$$r_3(x_2, x_3) = 0$$

$$r_4(x_3, x_4) = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$r_n(x_{n-1}, x_n) = 0$$

különlegesen érdekes speciális esete az egyik, a szövegben tárgyalt rendszernek: melyiknek?

Találkoztunk ezzel már előbb is? Hol volt már alkalmunk két analóg módon kapcsolódó rendszer összehasonlítására?

6.7. Szerkesszünk megadott hosszúságú húrt egy kör adott belső pontján át.

Milyen típusba sorolnánk ezt a feladatot?

6.8. Adott két egyenes és egy pont (a , b és C) helyzete, továbbá az l hosszúság. Rajzoljunk a C ponton át olyan x egyenest, hogy az a , b és x egyenesek alkotta háromszög kerülete l legyen.

Milyen típusba sorolnánk ezt a feladatot?

6.9. *Vegyük a feltételnek csak egy részét.* A 6.2.(7) pontban tárgyalt probléma két részfeltételéből (r_1) valamivel könnyebben kezelhető: e követelmény kielégítésével próbálkozva, valami tervfélét gondolhatunk ki. Adott betűk halmazából, mint ZÁRSZAVA, olyan szót (anagrammát) kell megformálni, hogy abban csak az adott betűk, de azok mind szerepeljenek. A következő eljárás segítségünkre lehet: ejtsük el

a feltétel második részét („de azok mind”); próbálgassunk olyan szavakat, vagy szó-kasos szórészeket, szóvégződéseket, melyeket az adott betűk halmazából kialakíthatunk. Ilyen fajta rövid szavakat könnyű megformálni, és egyre hosszabbakra térve, remélhetjük, hogy végül is eljutunk a kívánt anagrammához. Esetünkben:

ZÁR, RÁZ, VÁR, SZÁR, ÁRA, VÁZ

ÁRVA, VÁRA, ZÁRA, SZAVA, AVAR

ZÁRVA, SZAVAZ

RÁ (kezdés)

VA, VÁ, ZÁ (végződés)

6.2.(7) pontbeli problémánk megoldása közben ezekre a „szófoszlányokra” tekint-sünk, tartsuk eközben eszünkben az anagrammának nemcsak az (r_1), hanem az (r_2) részfeltételét is. Egyes szavakat anagrammává kapcsolhatunk össze — de például SZAVA RÁZ mégsem jelent elfogadható megoldást.

6.10. *Ariadne fonala*. Minosz király lánya, Ariadné beleszeretett Thézeuszba. Egy gombolyag fonalat adott neki. Thézeusz ezt gombolyította le a Labyrinthusban jár-ván, és így megtalálta a fonal nyomán az útvesztőből kivezető utat.

Vajon része volt-e valamelyik történelem előtti heurisztikus lángelmének e mítosz kialakulásában? Olyan találóan idézi némely problémának a természetét.

Problémák megoldását próbálgatva gyakran abba a nehézségbe ütközünk, hogy az utoljára elért pontról nincs továbbvezető utunk. De a Labyrinthus egészen más fajta problémát idéz fel. Az elért pontból nagyon sok út vezet tovább, a nehézséget az okozza, hogy választani kell közülük. Hogy ilyen problémával megbirkózhassunk — vagy ha már megbirkóztunk vele, le is tudjuk írni a megoldását —, meg kell próbálnunk a benne foglalt kérdéseket fokozatosan, a legmegfelelőbb, a *leggazdasá-gosabb* sorrendben tárgyalni. Ha két lehetőség merül fel, úgy kell megválasztanunk a következő kérdést, hogy megelőző munkánkból a lehető legtöbbet tudjuk felhasználni. „Keresztutaknál a legmegfelelőbb választást Ariadne fonala sugalmazza.” Ez — mel-lesleg megjegyezve — Leibniz egyik kedvenc ideája volt.

Olyan problémák, amelyekben több ismeretlen, több egymással összefüggő feladat és feltétel van, gyakran ilyen labirintustermészetűek. Erre a keresztretjvények és a bonyolult mértani alakzatok megszerkesztése a legjobb példa. Ha ilyen természetű problémát kell megoldanunk, minden lépésnél választás előtt állunk: melyik részlet-feladat (melyik szó, az alakzat melyik része) felé forduljunk előbb? Először is a leg-gyengébb pontot kell megkeresnünk: azt a részfeltételt, amellyel kezdeni legjobb, a rejtvény legkönnyebben kitalálható szavát, az alakzat legegyszerűbben megszer-keszthető részét. Ha már rátaláltunk az első szóra, ha meg tudtunk szerkeszteni valami keveset az alakzathoz, akkor nagyon gondosan válasszuk ki a második részlet-feladatunkat: azt az elsőől különböző szót (vagy azt a részt az alakzathoz), amihez az először megtalált a legtöbb segítséget adja. És így tovább, úgy kell mindig meg-választanunk a következő részletfeladatot, a következő ismeretlent, amelyet meg-akarunk határozni, hogy az előzőleg elért ismeretlenekből a lehető legtöbb segítsé-get kapjuk. (Az itt körvonalmazott gondolatnak már a 6.5. pontban is hangot adtunk.)

Most olyan példák következnek, amelyeken kipróbálhatja az olvasó a fenti taná-csokat.

6.11. Keressük meg a 6.1. példában pontosan leírt háromsoros bűvös négyzetet. (Lehet, hogy egy megoldást ismerünk, de határozzuk meg az összeset. Nagyon fontos az, hogy a különböző ismeretleneket milyen sorrendben vizsgáljuk. Kivált azokat az ismeretleneket próbáljuk kijelölni, amelyeknek csak egyetlen értéke lehet, és kezdjük ezekkel.)

6.12. A 9-cel való szorzás megfordít egy négyjegyű számot (azaz olyan négyjegyű számot ad, amelynek ugyanazok a jegyei, csakhogy fordított sorrendben). Melyik szám ez?

(A feltétel melyik részét használjuk először?)

6.13. Határozzuk meg az a , b , c és d számjegyeket, ha tudjuk, hogy

$$ab \times ba = cdc.$$

Feltételezzük, hogy az ab kétjegyű szám (azaz $10a + b$) számjegyei, a és b különbözőek.

6.14. Egy háromszögnek hat „alkotórésze” van: három oldala és három szöge. Lehet-e két *nem egybevágó* háromszöget találni úgy, hogy az elsőnek öt alkotórésze megegyezzen a második öt alkotórészeivel? (*Nem* mondtuk, hogy az egymásnak *megfelelő* öt-öt alkotórész egyezik meg.)

6.15. András, Béla és Csaba pikniket terveztek. Fejenként 9 forintot szántak rá. Mindegyikük szendvicset, fagyaltot és szódavizet vásárolt, és ezekért hárman együtt rendre 9—9 forintot fizettek. Forintjaikat másként osztották be, és egyikük sem adott két különböző árúért ugyanannyit. A legnagyobb kiadás az volt, amit András fizetett fagyaltért. Béla kétszer annyit költött szendvicse, mint fagyaltra. Mennyit fizetett Csaba a szódavízért? (Minden összeg kerek forint.)

6.16. Három házaspár, Barnáék, Jánossyék és Kovácsék ünnepre készülődnek. Az ismerős gyerekeknek ajándékokat vettek. Hatan hatfélét vásároltak, de mindegyikük csak egyfélét — abból viszont annyi darabot, ahány cent volt egynek az ára. Minden családban a feleség 75 centtel többet költött a férjénél. Anna egy ajándékkal többet vett, mint Barna Balázs, Zsóka eggyel kevesebbet, mint Jánossy József. Marika férjének mi a vezetékneve?

6.17. Nagy hőség volt. Négy házaspár együtt 44 üveg Kinizsi sört fogyasztott: Anna 2, Boriska 3, Klára 4 és Dóra 5 üveggel. Barthát kivéve, aki csak annyit ivott, mint a felesége, a férfiak többet ittak, mint a feleségük: Gara kétszer, Fejér háromszor, Szabó négyszer annyi üveggel. Kinek ki a felesége?

6.18. *További példákat!* Vizsgáljunk e fejezet szempontjának megfelelő további feladatokat. Szenteljünk különös figyelmet a részfeltételekre osztásnak. Mérlegeljünk annak az előnyét vagy hátrányát, hogy munkánkat melyik részfeltétellel kezdjük. Gondoljunk át újra ebből a szempontból néhány előző példát, és keressünk még olyan feladatokat, amelyeknek a megoldásában ez a szempont hasznos lehet.

6.19. *Közbeeső feladat.* Elkezdünk dolgozni egy feladaton, de még a kezdet kezdetén vagyunk. Egészében megértettük, meghatározó problémáról van szó. Megfeleltünk arra a kérdésre is, hogy „mi az ismeretlen”, tudjuk, hogy mit keresünk. Felsoroltuk az adatokat, megértettük a feltételt is mint osztatlan egészet, és most szeretnénk a *feltételt megfelelő részekre osztani*.

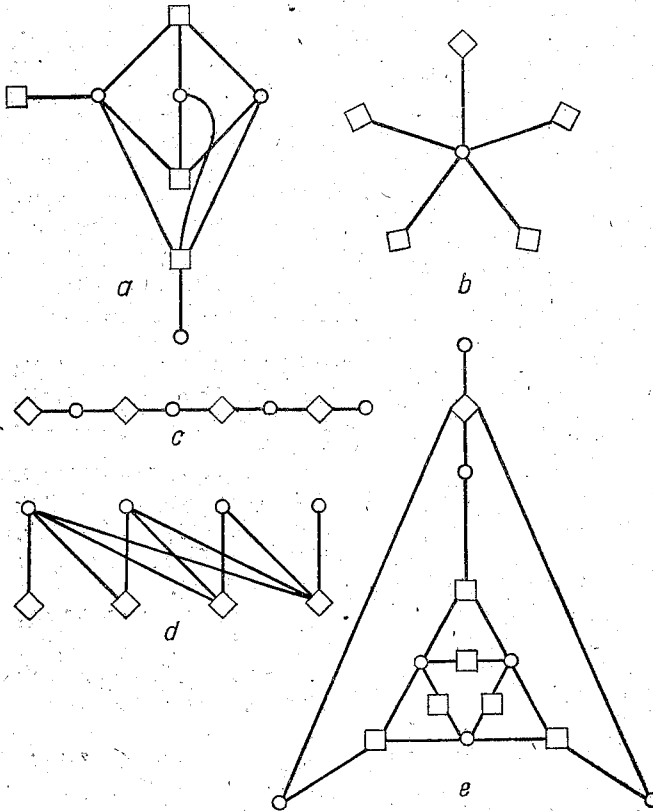
Megjegyezzük, hogy ez a feladat nem szükségképpen egyszerű. Több lehetőség is van a felosztásra, és mi — természetesen — a legelőnyösebbre törekedünk. Például ha egy mértani feladatot algebrai úton oldunk meg, akkor minden egyes részfeltételt egy-egy egyenlettel fejezünk ki. Különböző részekre osztások különböző egyen-

letrendszerekre vezetnek; természetesen azt az egyenletrendszert szeretnénk kiválasztani, amelyik a legkönnyebben kezelhető [l. a 2.5.(3) és 2.5.(4) pontokat].

A felvetett probléma megfogalmazásában a feltétel lehet oszthatlan egész, vagy lehet több részre osztva. Mindkét esetben van valami tennivalónk: az első esetben előnyös, a másodikban ha lehet, még előnyösebb részfeltételekre kell osztanunk. A felosztás közelebb vihet a megoldáshoz: *közbeeső feladat*, de sok esetben igen fontos feladat.

6.20. Grafikus ábrázolás. Szimbolikus egyenlettel fejeztük ki azt az összefüggést (relációt vagy kapcsolatot), amelyet bizonyos ismeretlenek között a feltétel szabott meg. Kifejezhetjük az ilyen összefüggést grafikusan, diagrammal is — és ez a rajz hozzájárulhat a relációrendszer világosabb megértéséhez.

Ábrázoljuk egy-egy kis körrel az ismeretleneket, kis négyzetekkel az ismeretlenek közti kapcsolatokat. Azt, hogy egy relációban mely ismeretlenek szerepelnek, úgy fejezzük ki, hogy a relációt képviselő kis négyzetet a megfelelő ismeretleneket jelentő kis körökkel összekötjük. Így például a 6.3. ábrán az *a*) diagram négy relációból álló rendszert mutat négy ismeretlen közt. Meglátjuk például a rajzból, hogy csak egyik ismeretlen szerepel mind a négy relációban, és csak egyikben van benne mind a négy



6.3. ábra. Körök és négyzetek, ismeretlenek és relációk

ismeretlen. Az a) diagram és a 6.1.(1) pont négy egyenletből álló rendszere ugyanazt a helyzetet mutatja, egyik a mértan, másik a formulák nyelvén. Ha az összekötő vonalak olyan pontban kereszteződnek, mely a kis körökön és négyzeteken kívül fekszik (ahogyan az egyszer az a) diagrammban is előfordul), akkor a keresztezés semmit sem fejez ki. El lehet képzelni azt is, hogy a kis körök és a négyzetek fekszenek a papír síkjában, az összekötő vonalak kilépnek a térbe és nincs közös pontjuk, csak véletlenül kereszteződnek a vetületeik a papír síkján.

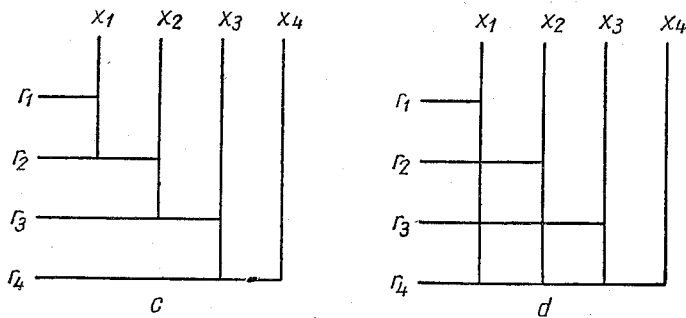
A 6.3. ábrán nemcsak az a) diagram, hanem a b , c , d és e diagramok is olyan reláció-rendszereket mutatnak be, amelyeket az előbbieken már tárgyaltunk; keressük meg, hogy melyik pontban vagy hányas számú példában.

(A 6.4. ábra a diagrammal való ábrázolás más módjára mutat példákat; ez az előző ábrázolási módnak „*duális*”: a relációkat is, az ismeretleneket is egyenesek ábrázolják; az előbbieket vízszintes, az utóbbiakat függőleges egyenesek. Akkor és csak akkor van a megfelelő egyeneseknek közös pontjuk, ha a relációban szerepel valamelyik ismeretlen. Ugyanezt fejezik ki a 6.3. és 6.4. ábrák c), illetve d) diagramjai.

A 6.4. ábra algebrai jelölést is eszünkbe juttathat: egy mátrixot, amelyben a sorok a rendszer relációinak, az oszlopok az ismeretleneknek felelnek meg. A mátrix eleme 1, ha a kérdéses relációban szerepel a megfelelő ismeretlen, 0, ha nem szerepel.)

6.21. *Néhány nem matematikai problématisp.* A feltétel melyik részfeltételét elégítjük ki előbb? Ez a kérdés jellegzetesen felvetődik a legkülönbözőbb helyzetekben. Miután kiválasztottuk az elsődlegesnek (primernek) tűnő részfeltételt, és felsoroltuk mindazokat az objektumokat (vagy csak néhányat), amelyek annak eleget tesznek, bevonjuk a többi — másodlagos (szekunder) részfeltételt is, ezek küszöbölik ki a felsorolt objektumok nagy részét, és esetleg csak egyet hagynak meg; ez kielégíti a másodlagos (szekunder) részfeltételeket is, és így az egész feltételt. Ez az eljárási típus, melyet alkalmunk volt megfigyelni az előbbieken [6.3.(3) pont, 6.15. és 6.16. példa], előfordul és alkalmazható különféle nem matematikai példákban is.

A fordító problémája. Angol szöveg magyarra fordításakor meg kell találnunk egy angol szó, mondjuk „confidence” szabatos magyar megfelelőjét. Egy angol—magyar szótár sok magyar szót sorol fel (bizalom, önbizalom, merészség, vakmerőség), amelyek feltételünknek legfeljebb nyers, elsődleges részfeltételét elégítik ki. Gondosan meg kell tehát vizsgálnunk a szöveget, hogy más, rejtettebb részfeltételeket fedezzünk fel; azután ezeket is számításba vesszük, hogy elvethessük a kevésbé odaillő szavakat, és kiválaszthatjuk a felsoroltakból a legmegfelelőbbet.



6.4. ábra. Ismeretlenek és relációk, függőleges és vízszintes egyenesek

Két lépésben matt. Adott, egy a játékszabályoknak megfelelő, világos és sötét sakkfigurákból álló felállítás a sakktáblán. Az ismeretlen: „világosnak” egy lépése. A feltétel azt kívánja, „világosnak” ez a lépése olyan legyen, hogy „sötét” bármely húzása után „világos” a következő lépésével mattot adhasson.

Világos kívánt lépésének el kell háritania sötét minden ellenlépését (meg kell akadályoznia létrejöttét, vagy fel kell készülnie, hogy mattal válaszoljon rá). Így hát azt mondhatjuk, hogy a feltétel annyi részből áll, ahány ellenlépést el kell háritani.

Megfelelő stratégia lehet, ha először elgondoljuk sötét valamilyen veszélyes lépését, és számba vesszük mindazokat a lépéseket, amelyekkel világos ezt elháríthatja. Ezután sötét „kevésbé veszélyes” lépéseit kell figyelembe venni, és elejteni világosnak azokat az előbb számításba vett húzásait, amelyek nem védik ki ezeket. Végül is a helyes megoldásnak egyedül kell fennmaradnia.

Mérnöki terv. Egy mérnök új szerkezetet akar tervezni. A szerkezetnek egész sereg feltételt kell teljesítenie, hogy gyártásra kerülhessen. Ezek közül egyesek műszaki természetűek: a szerkezetnek jól kell működnie, a használatban veszélytelennek és tartósnak kell lennie és így tovább; mások kereskedelmi természetűek: legyen alacsony az előállítási költsége, legyen iránta kereslet és így tovább. A mérnök elsősorban a műszaki követelményeket (vagy ezek némelyikét) veszi számításba. Ezek alkotják együtt a „primer” feltételt. Ilyenformán világosan körülhatárolt műszaki (fizikai) problémát kell megoldania. A problémának több megoldása is van, ezeket sorra veszi, és megvizsgálja. Ha ezt megtette, a kereskedelmi követelmények jönnek számításba (melyeket eddig „szekunder” részfeltételeknek tekintettünk). Lehet, hogy ezek nyomán a technikailag még oly tökéletes szerkezetek közül is sokat el kell vetnünk; végül megmarad az az egy, amelynek az előállítása a legtöbb hasznot ígéri.

6.22. Oldjuk meg fejben — papír és ceruza használata nélkül — a következő három egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszert:

$$3x + y + 2z = 30,$$

$$2x + 3y + z = 30,$$

$$x + 2y + 3z = 30.$$

Ellenőrizzük megoldásunkat.

6.23. Adott egy háromszög három oldalának hossza: a , b és c . A háromszög mindegyik csúcsa egy-egy kör középpontja. Ezek a körök egymáson kívül vannak, és egymást érintik. Határozzuk meg a három sugarat, x , y és z -t.

6.24. Határozzuk meg a következő négy egyenletből álló egyenletrendszert kielégítő x , y , u és v -t:

$$y + u + v = -5,$$

$$x + u + v = 0,$$

$$x + y + v = -8,$$

$$x + y + u = 4.$$

Látunk-e rövidítésre módot?

6.25. *Finomabb osztályozás.* Az előző, 6.22., 6.23. és 6.24. példák fontos pontra világítanak rá. Ha felismerjük, hogy a több ismeretlenes probléma feltétele *szimmetrikus* az ismeretlenekben, akkor ez nemcsak befolyásolhatja, hanem nagyon meg is könnyítheti a megoldás menetét. (Lásd a 2.8. példát is, és MRP 1. kötetének 187–188. oldalán a 41. példát. Néha, mint a 6.23. példában is, nemcsak az ismeretlenek, hanem az ismeretlenek és az adatok permutációit is számba kell vennünk.) Vannak más, ritkábban előforduló, de mégis érdekes esetek, melyekben a feltétel az ismeretleneknek (és az adatoknak) *nem az összes*, hanem csak némely permutációjánál (bizonyos permutációcsoportnál) marad változatlan, éppen ezt illusztrálja a 6.22. példa (ciklikus permutáció). Ezt a megjegyzést nyomon követve eljuthatunk a meghatározó problémák finomabb osztályozásához, mint ami a fejezet alapján [lásd 6.1.(6) pontot] következne. Előre láthatjuk, hogy ez az osztályozás tanulmányaink során fontos lehetne.

MEGOLDÁSOK

1. Fejezet

- 1.1. Kör; az adott pont a középpontja, az adott távolság a sugara.
- 1.2. Két, az adott egyenessel párhuzamos egyenes.
- 1.3. Egyenes; az adott két ponttal határolt szakasz felező merőlegese.
- 1.4. Az adott párhuzamosok távolságát felező, közöttük haladó, velük párhuzamos egyenes.
- 1.5. Két, egymásra merőleges egyenes, az adott egyenesek bezárta szögek szögfelezői.
- 1.6. Két körív, melyek az AB egyenesre szimmetrikusak, két végpontjuk, A és B közös.
- 1.8. Két mértani hely, 1.1. példa.
- 1.9. Két mértani hely, 1.1. és 1.2. példa.
- 1.10. Két mértani hely, 1.2. és 1.6. példa.
- 1.11. Két mértani hely, 1.1. és 1.6. példa.
- 1.12. Két mértani hely, 1.5. példa.
- 1.13. Két mértani hely, 1.2. példa.
- 1.14. Két mértani hely, 1.1., 1.2. példák.
- 1.15. Két mértani hely, 1.6. példa.
- 1.16. Szimmetriával visszavezethető az 1.3.(2) pontra, vagy az 1.12. példára.
- 1.17. Két mértani hely, 1.6. példa.
- 1.18. a) Ha X úgy változik, hogy az $XCA\Delta$ és $XCB\Delta$ területe egyenlő marad, akkor X mértani helye a C -n átmenő súlyvonal. (Bizonyítsuk!) A keresett pont a súlyvonalak metszéspontja. b) Ha X úgy változik, hogy az $ABX\Delta$ területe az adott ABC háromszög területének egyharmad része marad, akkor X mértani helye egy, az AB oldallal párhuzamos egyenes, amelynek AB -től való távolsága egyharmada a C -ből húzható magasságnak (lásd az 1.2. példát). A keresett pont két ilyen, az oldalakkal párhuzamos egyenes metszéspontja. Mindkét megoldás a „két mértani hely” megoldástípus alkalmazása.
- 1.19. Kössük össze a beírt kör középpontját az a oldal két végpontjával; az így kapott háromszögnek a beírt kör középpontjánál levő szöge

$$180^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Két mértani hely, 1.2. és 1.6. példa.

- 1.20. Segédábra: a átfogójú és m_b befogójú derékszögű háromszög.
- 1.21. Segédábra: lásd az 1.20. példát.

- 1.22. Segédábra: lásd az 1.20. példát.
- 1.23. Segédábra: derékszögű háromszög, egyik befogója m_a , ezzel szemben fekvő szöge β .
- 1.24. Segédábra: lásd az 1.23. példát. Másik megoldás: l. 1.34. példa.
- 1.25. Segédábra: derékszögű háromszög, átfogója f_a , magassága m_a .
- 1.26. Segédábra: háromszög három oldalból.
- 1.27. Tételezzük fel, hogy a hosszabb c -nél. Segédábra: háromszög $a-c$, b és d oldalakkal; lásd GI. Feladatunk variálása. 5. példa, 111—112. old.
- 1.28. Az 1.27. példa általánosítása; amely megfelel az $\varepsilon = 0$ esetnek. Segédábra: háromszög a , c , ε -ből; l. MPR, 2. kötet, 142—145. old.
- 1.29. Segédábra: háromszög a , $b + c$, $\alpha/2$ -ből.
- 1.30. Segédábra: háromszög a , $b + c$, $90^\circ + (\beta - \gamma)/2$ -ből.
- 1.31. Segédábra: háromszög $a + b + c$, m_a , $\alpha/2 + 90^\circ$ -ből. Lásd GI. Segédelemek 3. példa, 212—214. oldal és Szimmetria, 227—228. oldal.
- 1.32. Az 1.6.(1) pont kiindulásának alkalmas módosításával: zsugorítsuk az egyik kör sugarát olyan mértékben, amilyenben a másikat növeljük. Segédábra: egy külső pontból érintők egy körhöz, azután két téglalap szerkesztése.
- 1.33. Hasonlítsuk össze az 1.6.(1) ponttal. Segédábra: azon háromszög köré írható kör, melynek csúcsai a három adott kör középpontja.
- 1.34. Hasonló háromszög α , β -ből; a kívánt méretet ezután az adott f_c szakasz felhasználásával nyerjük. Lényegében az 1.24. példával azonos.
- 1.35. Hasonló alakzatok; hasonlósági középpont az adott háromszög derékszögének csúcsa. A derékszög szögfelezője az átfogót a kívánt négyzet egyik csúcsában metszi.
- 1.36. Az 1.35. példa általánosítása. A hasonlósági középpont A (vagy B). Vessük össze GI. Szerkesztési feladat, 40—41. oldal.
- 1.37. Hasonló alakzatok: hasonlósági középpont a kör középpontja. A keresett négyzet ugyanarra az egyenesre szimmetrikus, mint az adott köré.
- 1.38. Hasonló alakzat: minden, az adott egyenest érintő olyan kör, melynek középpontja az adott két pontot összekötő egyenes felező merőlegesén van. A felező merőleges és az adott egyenes metszéspontja a hasonlósági középpont. Két megoldás.
- 1.39. A két adott érintő alkotta szög megfelelő szögfelezőjére vonatkozó szimmetria még egy pontot jelent, melyen a körnek keresztül kell haladnia, és így a probléma az 1.38. példára vezethető vissza.
- 1.40. A beírt körnek az érintési pontokhoz húzható sugarai $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$, ... szöget alkotnak; ezért közvetlenül juthatunk hasonló idomhoz. Alkalmazható akárhány oldalú körülírt sokszögre (poligonra).
- 1.41. Jelöljük a keresett háromszög területét A -val, oldalait a , b és c -vel úgy, hogy $2A = am_a = bm_b = cm_c$.
- Szerkesszünk háromszöget az adott m_a , m_b , m_c oldalakkal, jelöljük a területét A' -vel, a megfelelő magasságvonalait a' , b' , c' -vel. Így

$$2A' = m_a a' = m_b b' = m_c c'$$

Ezért

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

és így az a háromszög, melynek három oldala rendre a könnyen megszerkeszthető a' , b' , c' szakasz, hasonló a keresett háromszöghöz.

1.42. Az 1.41. példa megoldása nem teljes: ha például $m_a = 156$, $m_b = 65$, $m_c = 60$, akkor a keresett háromszög létezik, de az m_a , m_b , m_c oldalakkal adott segédháromszög nem.

E hiány megszüntetésének egyik járható útja az *általánosítás*: legyen p , q , r három pozitív egész szám, és (a jelölés *nem* azonos az 1.41. példával) a' , b' , c' a pm_a , qm_b , rm_c oldalú háromszög három magasságvonala; akkor

$$\frac{a}{pa'} = \frac{b}{qb'} = \frac{c}{rc'}.$$

Például olyan háromszög létezik, melynek oldalai 156, 65 és $120 = 2 \cdot 60$.

1.43. A körülírt kör középpontjából egyenest húzatunk az a oldal egyik végpontjához és merőlegest magára az oldalra. Így olyan derékszögű háromszöget kapunk, melynek R az átfogója, α az egyik szöge és $\frac{a}{2}$ az α -val szemben fekvő befogója.

Ez α , a és R közt összefüggést jelent: bármelyiket megszerkeszthetjük a másik kettőből. (Ezt az összefüggést az $a = 2R \sin \alpha$ trigonometrikus egyenlettel is kifejezhetjük.) Ha az adatok nem elégítik ki ezt az összefüggést, akkor a feladat nem oldható meg, ha kielégítik, akkor határozatlan.

1.44. a) Háromszög szerkesztése α , β , γ -ból: a feladat vagy nem oldható meg, vagy határozatlan. b) A következő általános helyzet az alapja az 1.43. és az a) példának is: megoldásuk csak akkor létezhet, ha az adatok között valamilyen meghatározott összefüggés teljesül; aszerint, hogy azt az összefüggést az adatok kielégítik-e vagy sem, a megoldás határozatlan, vagy nem is létezhet. c) 1.43. példa megoldásának segítségével vezessük vissza erre: háromszög α , β , α -ból. d) 1.43. példa megoldásának segítségével vezessük vissza az 1.19. példára.

1.45. Hagyjuk figyelmen kívül a hang sebességét befolyásoló, tőlünk független zavaró tényezőket (ilyen például a szél, a hőmérsékletváltozás). Akkor az A és B állásban végzett megfigyelések időkülönbségéből megkapjuk a két távolság különbségét, $AX - BX$ -et. Ez X -re mértani helyet ad: egy hiperbolát. Ha összehasonlítjuk a C -re és A -ra (vagy C -re és B -re) vonatkozó adatokat, egy másik hiperbolát kapunk. A két hiperbola metszéspontja adja X -et. Példánk főként abban hasonlít az 1.15. példához, hogy itt is két mértani helyet kapunk. A fő különbség: ott körívek a mértani helyek, itt hiperbolák. Vonalzóval és körzővel nem szerkeszthetünk hiperbolát, de megszerkeszthetjük más eszközzel. Konstruálhatunk olyan gépet is, amely megfelelően kiértékeli a három állás megfigyeléseit.

1.46. Az említett mértani helyek nem lennének alkalmazhatók, ha az 1.2. pontban leírt megoldástípust szó szerint követnénk. Pedig ezek a mértani helyek alkalmazhatók, és az előző példákban többször alkalmaztuk is őket. Inkább az 1.2. pont megállapításai szorulnak bővítésre: engedjünk meg olyan mértani helyet is, amely véges számú egyenes vagy kör, vagy egyenes szakasz, vagy körív egyesítéséből áll.

1.48. Ha azok a részek, melyekre a feltételt osztottuk, együttesen egyenértékűek a feltétellel, akkor a felosztás különböző módjainak is egyenértékűeknek kell lenniük egymással. Ebből adódik a háromszögre vonatkozó következő tétel: az oldalak felező merőlegesei (három van) ugyanazon a ponton haladnak át. És a tetraéderre: az éleket felező merőleges síkok (hat ilyen van) ugyanazon a ponton haladnak át.

1.50. (1) Bizonyos kivételes esetektől eltekintve (lásd az 1.43. és 1.44. példákat), az 1.7. példában felsorolt háromszög-alkatrészek közül tekintsünk három különbözőt adatnak, és tűzzük ki feladatul az annak megfelelő háromszög megszerkesztését.

Íme, néhány olyan kombináció, mellyel könnyű a szerkesztés:

$a,$	$m_b,$	R
$a,$	$m_b,$	s_b
$a,$	$m_b,$	s_a
$m_a,$	$f_a,$	b
$m_a,$	$s_a,$	s_b
$m_a,$	$s_b,$	s_c
$m_a,$	$m_b,$	s_a
$a,$	$b,$	R

Könnyű az az eset is, ha α , β és egy olyan szakasz adott, amely nem szerepel az 1.24. vagy 1.34. példában. Kevésbé könnyű, ha

$$\alpha, r, R$$

van megadva.

(2) Sok olyan probléma van triéderekkel kapcsolatban — az 1.6.(3) pontban tárgyalthoz hasonló problémák — amelyek fontosak, és az ábrázoló geometria segítségével is megoldhatók. Itt is van egy ilyen: „Adott a három oldalú testszöglet α oldala és két rajta fekvő lapszöge, β és γ . Szerkesszük meg a további két oldalt, b -t és c -t.” A megoldás nem nehéz, de itt túl sok helyet foglalna el.

(3) Az 1.47. példa az 1.3.(1) térbeli analogonja. Vizsgáljuk az 1.3.(2) pont, az 1.18. példa, az 1.3.(3) pont és az 1.14. példa térbeli analogonjait.

Nincs megoldás: 1.7., 1.47., 1.49., 1.51.

2. Fejezet

2.1. Ha Bélának x darab 5 fillérese és y darab 10 fillérese van, akkor a feltételt a következő két egyenletre fordíthatjuk le:

$$5x + 10y = 350,$$

$$x + y = 50.$$

Ez az egyenletrendszer, nyilvánvaló egyszerűsítés után, megegyezik a 2.2.(3) pont egyenletrendszerével.

2.2. m cső a tartály megtöltésére, n pedig a kiürítésére való. Az első csővel a_1 perc, a másodikkal a_2 perc, ... az m -edikkel a_m perc alatt tölthetjük meg a tartályt. A kiürítő csővekből az elsővel b_1 perc, a másodikkal b_2 perc, ..., az n -edikkel b_n perc alatt üríthetjük ki a tartályt. Mennyi ideig tart az üres tartály megtöltése, ha minden cső nyitva van?

A keresett t idő kielégíti a következő egyenletet:

$$\frac{t}{a_1} + \frac{t}{a_2} + \dots + \frac{t}{a_m} - \frac{t}{b_1} - \frac{t}{b_2} - \dots - \frac{t}{b_n} = 1.$$

(Hogyan értelmezzük azt, ha a megoldásban t negatív? Lehet, hogy nincs is megoldás. Hogyan értelmezzük ezt az esetet?)

2.3. a) Kovács keresete harmadát élelemre, negyedét a háztartásra, hatodát ruházkodásra költi. Szeretné tudni, hogy meddig élhet egy évi jövedelméből?

b) Mekkora feszültségnek kell lennie két pont között ahhoz, hogy ezeket 3, 4 és 6 ohm ellenállású párhuzamosan kapcsolt vezetékkel összekötve, a három vezetéken átmenő áram összintenzitása 1 legyen.

És így tovább.

2.4. a) x változatlan marad, ha w -t $-w$ -vel helyettesítjük: szél irányában indulva és széllel szemben visszatérve a megadott idő alatt a repülőgép ugyanazon szélső pontot éri el.

b) Vizsgáljuk meg dimenzióval; lásd GI. 79–82. oldal.

2.5. Az

$$x + y = v$$

$$ax + by = cv$$

egyenletrendszer teljesen megegyezik a 2.6.(2) pontban nyert egyenletrendszerrel.

2.6. Válasszuk a koordináta-rendszert az AB egyeneshez viszonyítva ugyanolyan helyzetűnek, mint a 2.5.(1) pontban, és legyen $AB = a$. A négy körívet érintő kör keresett (x, y) koordinátájú középpontja kielégíti a következő két egyenletet:

$$a - \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + y^2} - \frac{a}{4}$$

$$x = \frac{a}{2},$$

melyekből

$$y = a \frac{\sqrt{6}}{5}$$

következik.

2.7. Heron képlete meglehetősen ijesztőnek tűnik, pedig elég jól kezelhető, ha alaposan megfigyeljük az „összezszer-különbség” kombinációkat:

$$\begin{aligned} 16D^2 &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\ &= [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2] \\ &= (2bc - a^2 + b^2 + c^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2) \\ &= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &= 4(p^2 + q^2)(p^2 + r^2) - (2p^2)^2 \end{aligned}$$

2.8. a) *Szükséges előismeret.* A (3) kiindulás több síkmértani ismeretet feltételez a (4)-nél (Heron képlete kevésbé ismert, mint a terület alappal és magassággal való kifejezése). A (4)-hez viszont több térmértani ismeret szükséges (meg kell látnunk, és azután be is kell bizonyítanunk, hogy k merőleges a -ra).

b) *Szimmetria.* A három adat, A , B és C , ugyanazt a szerepet játssza, a probléma A , B és C -ben szimmetrikus. A (3) kiindulás tekintettel van erre a szimmetriára, de a (4)-es szakít ezzel; A -t B -vel és C -vel szemben kiemeli.

c) *Tervezés.* A (3) kiindulás „módszeresebben” halad. Már a kezdettől bizalommal követhetjük. Egészen világosan ahhoz a hét egyenletből álló egyenletrendszerhez vezet, amely első látásra elég ijesztőnek tűnt. (Ez nem az elgondolás hibája; tulajdonképpen arra az eljárásra utal, amellyel a megoldást el kell végeznünk; lásd a 6.4.(2) pontot.) A (4) kiindulásról kevésbé látjuk előre, hogy hasznos lesz; de hála egy szerencsés megjegyzésnek, sokkal rövidebb számolással jutunk el a végeredményhez.

$$2.9. \quad V^2 = p^2 q^2 r^2 / 36 = 2ABC/9$$

2.10. A 2.5.(3) pont három egyenletéből, amely a^2 , b^2 és c^2 -et p , q és r -rel fejezi ki, azt kapjuk, hogy

$$p^2 + q^2 + r^2 = S^2,$$

$$p^2 = S^2 - a^2, \quad q^2 = S^2 - b^2, \quad r^2 = S^2 - c^2,$$

és így a 2.9. példa szerint

$$V^2 = \frac{(S^2 - a^2)(S^2 - b^2)(S^2 - c^2)}{36}.$$

2.11. $d^2 = p^2 + q^2 + r^2$. Ezt a feladatot a GI. 1. részében alaposan megtárgyaltuk (lásd 25–39. old.).

2.12. Mind a 2.11. példával, mind a 2.5.(3) ponttal megegyező jelölést választunk. Figyeljük az ugyanazon laphoz tartozó mindkét átlót. A 2.10. példában elvégzett számolás ismétlésével azt találjuk, hogy

$$d^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

2.13. Egy tetraédert meghatároz hat élének a hossza — ez az 1.1. pontban legelőször vizsgált feladat térbeli analógiájából következik. A hat él előírt helyzetét (konfigurációját) és így a szóban forgó tetraédert úgy kaptuk, hogy a 2.11. és 2.12. példában tárgyalt téglatest mindegyik oldalán alkalmas átlót választottunk. A téglatest térfogata pqr . Vágjunk le belőle négy egybevágó tetraédert, mindegyiknek van egy három élű derékszögű testszöglete, és $pqr/6$ a térfogata, lásd 2.9. példát; így nyerjük a szóban forgó tetraédert, melynek térfogata ezért

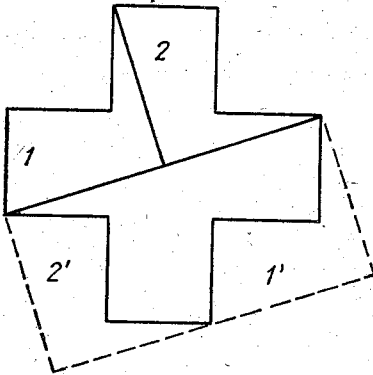
$$V = pqr - 4pqr/6 = pqr/3.$$

A 2. 10. példából $p^2 = S^2 - a^2$ és így tovább; ezért

$$V^2 = \frac{(S^2 - a^2)(S^2 - b^2)(S^2 - c^2)}{9}.$$

2.14. A 2. 10. példában: Ha $V = 0$, akkor az egyik tényező, például $S^2 - a^2 = p^2$, eltűnik — és így két lap egyenes szakasszá fajul; a másik két lap egybeeső derékszögű háromszöggé lesz.

A 2.13. példában: Ha $V = 0$, a tetraéder (kettősen fedett) téglalappá fajul; mind a négy lapja egybevágó derékszögű háromszöggé lesz; valóban, ha $S^2 - a^2 = 0$, akkor $a^2 = b^2 + c^2$.



M.2.15. ábra

2.15. Amint a 2.7. pont utolsó egyenlete mutatja, a keresett téglalap x oldala olyan derékszögű háromszög átfogója, melynek befogói $3a$ és a . Ezt az x szakaszt a keresztben négy- (de nem lényegesen különböző-)féleképpen állíthatjuk elő; középpontjának egybe kell esnie a kereszt középpontjával, mely a szakaszt két részre osztja. Mindegyik résznek a hossza ugyanaz az $x/2$ hosszúság, mint a keresett téglalap másik oldaláé. Mindez erősen sejteti az M.2. 15. ábrán látható megoldást.

2.16. a) $x^2 = 12 \cdot 9 - 8 \cdot 1$, $x = 10$.

b) Toljuk két egységnyi balra és egy egységnyi felfelé, így

$$10 = 12 - 2 = 9 + 1.$$

c) A középpontra vonatkozó szimmetria megmaradása valószínűbb. Minderre az M.2.16. ábra vezet.

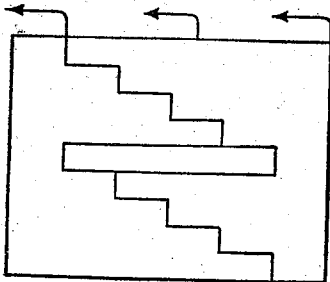
2.17. Legyen x és y az öszvér, illetve számár cipelte teher. Akkor

$$y + 1 = 2(x - 1), \quad x + 1 = 3(y - 1), \quad x = 13/5, \quad y = 11/5.$$

2.18. A férjnek h , a feleségnek w fontnyi csomagja volt, x fontot lehet illeték nélkül vinni.

$$h + w = 94, \quad \frac{h - x}{1 \cdot 5} = \frac{w - x}{2} = \frac{94 - x}{13 \cdot 5}; \quad x = 40.$$

2.19. 700, 500, $x = 400$ az $x + (x + 100) + (x + 300) = 1600$ egyenletből.



M.2.16. ábra

2.20. Mindegyik fiú 3000-et kapott.

2.21. Az egész vagyon y volt. Ha egy-egy gyermek része x , akkor

az első:
$$x = 100 + \frac{y - 100}{10},$$

a másodiké:
$$x = 200 + \frac{y - x - 200}{10},$$

a harmadiké:
$$x = 300 + \frac{y - 2x - 300}{10},$$

és így tovább.

Bármelyik két egymás után következő jobb oldal különbsége

$$100 - \frac{x + 100}{10}.$$

Ha ez a különbség 0-val egyenlő (ahogyan annak lennie kell), akkor $x = 900$ és (az első egyenletből) $y = 8100$; tehát 9 gyermek volt.

2.22. Legyen a három játékos pénzüsszege kezdetkor x , y és z ; előnyös lesz az

$$x + y + z = s$$

mennyiség bevezetése ($s = 72$). Figyeljük meg a játékosok birtokában levő pénzüsszeget négy különböző alkalommal; bármelyik két, egymás után következő alkalmat egy-egy játszma választ el; a hármuk pénze együtt mindig s .

<i>Első</i>	<i>Második</i>	<i>Harmadik</i>
x	y	z
$2x - s$	$2y$	$2z$
$4x - 2s$	$4y - s$	$4z$
$8x - 4s = 24$	$8y - 2s = 24$	$8z - s = 24$

Ezért $x = 39$, $y = 21$, $z = 12$.

2.23. A 2.4.(1) és 2.4.(2) pont analogonja, a 2.2. példa speciális esete.

$$m = 3, \quad n = 0, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 8/3, \quad a_3 = 12/5.$$

Ezért $t = \frac{8}{9}$ része egy hétnek.

2.24. Newton a 2.2. példa irányában való általánosításra gondol, de nem megy olyan messze: „kiürítő csövek” nem szerepelnek, nincs b ; $n = 0$.

2.25. Búza, árpa és zab vékája 5, 3 és 2 shillingbe kerül. Lásd a 2.26. példát. (1 font = 20 shilling.)

2.26. Legyen a három árunak az egységára

$$x, y, z$$

annak a keveréknek az ára pedig p_v , amely

$$a_v, b_v, c_v$$

egységnyit tartalmaz ezekből az árukból, $v = 1, 2, 3$. Akkor három egyenletből álló egyenletrendszerünk van:

$$a_v x + b_v y + c_v z = p_v.$$

Ezt az általánosítást a 2.25. példából kapjuk úgy, hogy a

$$\begin{array}{cccc} 40 & 24 & 20 & 312 \\ 26 & 30 & 50 & 320 \\ 24 & 120 & 100 & 680 \end{array}$$

számmátrixot az

$$\begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & p_3 \end{array}$$

betűmátrixszal helyettesítjük.

Nem okoz nehézséget az áttérés 3-ról n különböző árura.

2.27. Jelöljük

α -val a legeltetés megkezdésekor a holdankénti fűmennyiséget.

β az a fűmennyiség, amelyet egy ökör egy hét alatt elfogyaszt,

γ az a fűmennyiség, amely egy holdon egy hét alatt nő,

a_1, a_2, a rendre az ökrök száma,

m_1, m_2, m rendre a holdak száma,

t_1, t_2, t a három tárgyalt esetben, rendre a hetek száma.

a, α, β és γ az ismeretlenek, a többi nyolc mennyiség (számszerűen) adott.

A feltételek:

$$m_1(\alpha + t_1\gamma) = a_1 t_1 \beta$$

$$m_2(\alpha + t_2\gamma) = a_2 t_2 \beta$$

$$m(\alpha + t\gamma) = at\beta,$$

három egyenletből álló egyenletrendszer a három ismeretlenre, melyből

$$a = \frac{m[m_1 a_2 t_2 (t - t_1) - m_2 a_1 t_1 (t - t_2)]}{m_1 m_2 t (t_2 - t_1)},$$

és a számadatokból $a = 36$.

2.28. Egy számtani sorozat öt eleme határozzuk meg az első elemét, és a különbséget (differenciát), ha adott: az elemek összege, 100 és a három utolsó elem összege az első két elem összegének hétszeresével egyenlő

$$a, a + d, \dots, a + 4d$$

$$a$$

$$d$$

$$a + (a + d) + \dots + (a + 4d) = 100$$

$$(a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) =$$

$$= 7[a + (a + d)]$$

Az

$$5a + 10d = 100, \quad 11a - 2d = 0$$

egyenletekből $a = 5/3$, $d = 55/6$; és így a sorozat

$$10/6, \quad 65/6, \quad 120/6, \quad 175/6, \quad 230/6.$$

2.29.

$$\frac{m}{r} + m + mr = 19$$

$$\frac{m^2}{r^2} + m^2 + m^2 r^2 = 133.$$

Vezessük be az

$$r + \frac{1}{r} = x \text{ jelölést.}$$

Így az egyenletrendszer

$$m(x + 1) = 19, \quad m^2(x^2 - 1) = 133.$$

Osztással mx -re és m -re két *linedáris* egyenlethez jutunk. Innen $m = 6$, $x = 13/6$, $r = 3/2$ vagy $2/3$; két (csak triviálisan különböző) sorozatot kapunk: 4, 6, 9 és 9, 6, 4.

2.30.

$$a(q^3 + q^{-3}) = 13, \quad a(q + q^{-1}) = 4.$$

Osztással q^2 -re másodfokú egyenlethez jutunk. A sorozat

$$1/5, \quad 4/5, \quad 16/5, \quad 64/5,$$

vagy ugyanezek az elemek fordított sorrendben.

2.31. Legyen az üzlettársak száma x . Fejezzük ki kétféleképpen a társaság hasznát (úgy, mint elért és úgy, mint felosztott hasznat):

$$(8240 + 40x \cdot x) \frac{x}{100} = 10x \cdot x + 224.$$

Az

$$x^3 - 25x^2 + 206x - 560 = 0$$

egyenletnek nincsen negatív gyöke (helyettesítsünk $x = -p-t$). Ha van racionális gyöke, akkor kell lennie pozitív egész gyökének is, és ez csak 560 osztója lehet. Próbáljuk ki rendre az $x = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16 \dots$ értékeket. A gyökök 7, 8 és 10. (Euler természetesen először csinálta meg az egyenletet, azután a mesét — próbáljuk meg utánózni.)

2.32. Az adott négyszettel nem közös középpontú négy kör középpontja egy másik négyszet egy-egy csúcsa, melynek átlóját kétféleképpen fejezzük ki:

$$(4r)^2 = 2(a - 2t)^2$$

$$r = (\sqrt{2} - 1) \frac{a}{2}.$$

2.33. Legyen $x + \left(\frac{d}{2}\right)$ az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága.

Akkor

$$\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = s^2, \quad x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

x eliminálása (kiküszöbölése) után

$$4s^4 - 4d^2s^2 + b^2d^2 = 0.$$

2.34. a) Az egyenlet d^2 -ben éppúgy, mint b^2 -ben első fokú, de s^2 -ben másodfokú: ezért s meghatározásának problémája ésszerűen nehezebbnek tekinthető, mint a másik kettőé.

b) d -nek akkor és csak akkor van pozitív értéke, ha $4s^2 > b^2$.

b -nek akkor és csak akkor van pozitív értéke, ha $d^2 > s^2$.

s -nek akkor és csak akkor van két különböző pozitív értéke, ha $d^2 > b^2$.

Az olvasó ebből különböző dolgokat tanulhat meg. Newton a 2.33. példa megoldásához a következő megjegyzéseket fűzte: „Innen van az, hogy az analízis azt parancsolja nekünk, hogy nem szabad különbséget tennünk adott és keresett mennyiségek között. Mert ha ugyanaz a számítás megfelel az adott és a keresett mennyiségeknek, akkor az a helyes, hogy minden eltérés nélkül tekintsük és hasonlítsuk össze őket... vagy még inkább az volna a helyes, ha a kérdést azokra az adott és keresett (*data* és *quaesita*) mennyiségekre vonatkoztatva tennénk fel, melyekről azt gondoljuk, hogy segítségükkel a legkönnyebben állíthatjuk fel egyenletünket.” Valamivel később hozzáteszi: „Így hát, azt hiszem, nyilvánvaló, hogy mit gondolnak a geometérek akkor, amikor azt követelik, hogy már meghatározottnak vegyük azt, ami még csak keresett.”

(Lásd az 1.4. pontot: „Vegyük megoldottnak a problémát”).

2.35. Egyenleteink felállításában épp ellenkező irányban haladunk, mint amilyenre a megfigyelt ösztönzi helyzetét. Adottnak tekintjük x -et és az α , β , γ , δ szögeket, ismeretlennek pedig l -t. Az $UVG\Delta$ -ból kifejezzük GV -t x , $\alpha + \beta$ és γ -val (sinus-tétel). A $VUH\Delta$ -ból kifejezzük HV -t x , β és $\gamma + \delta$ -val (sinus-tétel). A $GHV\Delta$ -ból meghatározzuk l -t GV , HV és δ -val (cosinus-tétel). Felhasználva GV és HV kifejezéseit, azt kapjuk, hogy

$$l^2 = x^2 \left[\frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta + \gamma)} + \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2(\beta + \gamma + \delta)} - \frac{2 \sin(\alpha + \beta) \sin \beta \cos \delta}{\sin(\alpha + \beta + \delta) \sin(\beta + \gamma + \delta)} \right].$$

Innen kifejezzük x^2 -et l , α , β , γ és δ -val.

2.36. Legyen

$$A, \quad 2s, \quad a, \quad b, \quad c$$

a terület, kerület, átfogó, a két befogó.

A és s adott, a , b és c ismeretlen.

Az

$$a + b + c = 2s, \quad bc = 2A, \quad a^2 = b^2 + c^2$$

egyenletrendszer megoldásához fejezzük ki $(b + c)^2$ -t kétféleképpen:

$$(2s - a)^2 = a^2 + 4A$$

$$a = s - \frac{A}{s}.$$

2.37. A háromszög oldalhosszai $2a$, u , v ; $u + v = 2d$; a $2a$ oldalra merőleges magasság hossza h .

Adott: a, h, d , határozzuk meg u, v -t.

Vezessük be x -et és y -t, az u és v oldalak merőleges vetületét a $2a$ hosszúságú oldalon, valamint a következő egyenlettel értelmezett z változót:

$$x - y = z.$$

Mivel

$$x + y = 2a$$

ezért

$$u^2 = h^2 + x^2 \quad v^2 = h^2 + y^2,$$

vagy

$$u^2 - v^2 = x^2 - y^2,$$

$$2s(u - v) = 2a \cdot 2z$$

$$u = d + \frac{a}{d}z \quad v = d - \frac{a}{d}z$$

$$x = a + z \quad y = a - z$$

$$\left(d + \frac{a}{d}z\right)^2 = h^2 + (a + z)^2$$

$$z^2 = d^2 \left(1 - \frac{h^2}{d^2 - a^2}\right).$$

2.38. Ha a és b a két nem párhuzamos oldal hossza, c és d a két átló hossza, akkor

$$2(a^2 + b^2) = c^2 + d^2.$$

Az átlók a paralelogrammát négy háromszögre vágják: alkalmazzuk a szomszédos háromszögekre a cosinus-tételt.

2.39.

$$(2b - a)x^2 + (4a^2 - b^2)(2x - a) = 0.$$

Ha $a = 10$, $b = 12$, akkor $x = \frac{16(-8 + 3\sqrt{11})}{7}$, jó közelítéssel $\frac{32}{7}$. Értelmez-
zük az $a = 2b$ esetet.

2.40.

$$\frac{a^2(3 + \sqrt{3})}{2}.$$

2.41. $1/3, 2/9, 2/9, 2/9$. A nagyobb háromszög oldalait a beírt háromszög csúcsai $2 : 1$ arányban osztják.

2.42. (Stanford, 1957.) Vizsgáljuk először a legegyszerűbb esetet, az egyenlő oldalú háromszöget. Ebben az esetben a szimmetria arra a feltételre vezethet, hogy a négy háromszög alakú darab is egyenlő oldalú. Ha ez így van, akkor a háromszög alakú darabok oldalainak az adott háromszög oldalával párhuzamosaknak kell lenniük ezzel a megjegyzéssel felfedeztük az alakzat lényeges vonását, mely nemcsak a vizsgált speciális esetben oldja meg a problémát, hanem az általános esetben is. (Az egyenlő oldalú háromszögről „affinitás” segítségével térünk át az általános háromszögre.) Az adott háromszög egyik oldalával párhuzamos négy egyenes a másik két

12 A problémamegoldás iskolája — 42 163

oldalt öt-öt egyenlő szakaszra vágja szét. Végezzük el ezt a szerkesztést háromszor, az adott háromszög mindegyik oldalára vonatkozóan. Így azt 25 egybevágó és az eredetihez hasonló háromszögre bontjuk. Ebből a 25 háromszög alakú darabból könnyen kiválaszthatjuk a problémában jelzett négyet: mindegyik területe az adott háromszög területének $1/25$ -e. (Ez a megoldás egyértelműen meghatározott; mellőzöm a bizonyítást.)

2.43. (Stanford, 1960.) Általánosítás: A P pont a téglalap belsejében fekszik, távolsága a négy csúctól a, b, c és d , a négy oldaltól x, y, x', y' — mindez ciklikus sorrendben — (az óramutató járásának megfelelően). Alkalmass jelöléssel

$$a^2 = y'^2 + x^2, \quad b^2 = x^2 + y^2, \quad c^2 = y^2 + x'^2, \quad d^2 = x'^2 + y'^2,$$

és így

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0.$$

Esetünkben $a = 5, b = 10, c = 14$ és így

$$d^2 = 25 - 100 + 196 = 121; \quad d = 11.$$

Figyeljük meg, hogy az a, b és c adat d -t meghatározza, de nem elég a téglalap $x + x'$ és $y + y'$ oldalainak a meghatározására.

2.44. Legyen a négyzet oldala s . Akkor a 2.43. példa jelöléseivel $x + x' = y + y' = s$, és három egyenletünk van az x, y és s három ismeretlenre:

$$x^2 + (s - y)^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = b^2, \quad y^2 + (s - x)^2 = c^2.$$

Ezért

$$2sy = s^2 + b^2 - a^2, \quad 2sx = s^2 + b^2 - c^2,$$

négyzetre emeléssel és összeadással kapjuk az

$$s^4 - (a^2 + c^2)s^2 + [(b^2 - a^2)^2 + (b^2 - c^2)^2]/2 = 0$$

másodfokú egyenletet s^2 -re.

Ellenőrizzük a következő speciális esetek mértani jelentését:

(1) $s^2 = 2a^2$ vagy $s = 0$.

(2) $s = a$.

(3) s képzetes, kivéve ha $c^2 = 2b^2 = 2s^2$.

(4) s képzetes, kivéve ha $c^2 = c^2 = s^2$.

2.45. (Stanford, 1959.) $100\pi/4$ és $100\pi/(2\sqrt{3})$ vagy közelítőleg 78,54% és 90,69%. A nagy (négyzet alakú) asztalról az átmenet a végtelen síkra magában foglalja a határérték fogalmát, amelyre nem támaszkodunk, mivel az eredmény szemléletes.

2.46. A 2.32. példa eljárását követve a megfelelő kocka testátlóját kétféleképpen fejezzük ki:

$$(4r)^2 = 3(a - 2r)^2$$

$$r = (2\sqrt{3} - 3)a/2.$$

2.47. Egy téglalap négy csúcsa, ciklikus sorrendben a, b, c és d távolságra van egy P ponttól (mely bárhol lehet a térben). Adott ezen távolságok közül három, határozzuk meg a negyediket.

A 2.43. példában talált

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$$

összefüggés ebben az általánosabb helyzetben is érvényben marad, és ebből a megoldás közvetlenül következik. Alkalmazhatjuk ezt például egy P pontra és egy doboz (derékszögű paralelepipedon) alkalmasan választott négy csúcsára.

2.48. Térmértani probléma megoldását gyakran síkbeli „kulcsábra” segíti elő, amely a lényeges kapcsolatokra mutat rá.

A gúla magasságvonalán át fektessünk az alaplap két oldalával párhuzamos (és a másik két oldalra merőleges) síkot. Ennek a síknak a gúlával való metszete egy egyenlő szárú háromszög, melyet kulcsábrának használhatunk: a magassága h , az alapja mondjuk a , egyenlő a gúla alapjának egyik oldalával, a szárai $2a$ hosszúak, mivel ezek mindegyike egy-egy oldallap magassága. Ezért

$$(2a)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2,$$

és így a keresett felszín

$$5a^2 = 4m^2/3.$$

2.49. Például: egy hatoldalú szabályos gúla felszíne az alaphatszög területének a négyszerese. Adott a , az alaplap egyik oldalának a hossza, határozzuk meg h -t, a gúla magasságát ($h = \sqrt{6}a$).

Lásd a 2.52. példát is.

2.50. Egy paralelogrammában a két átló négyzetösszege egyenlő a négy oldal négyzetösszegével (a 2.38. példa eredményének újabb megfogalmazása).

Egy paralelepipedonban legyen

$$D \qquad E \qquad F$$

a négyzetösszege

$$4 \text{ testátlónak,} \quad 12 \text{ élnek,} \quad 12 \text{ lapátlónak.}$$

Akkor

$$D = E = F/2.$$

(A 2.38. példa eredményének ismételt alkalmazásából következik.)

2.51. A keresett felszín négyzete

$$16s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Ezt a Heron-képlet analogonjának tekinthetjük, de túlságosan közelfekvő hozzá, és ezért nem érdekes.

2.52. (Stanford, 1960.) Legyen a háromszög egyik oldala a , T a tetraéder, O az oktaéder térfogata.

Első megoldás. Az oktaéder alkalmas síkkal két egybevágó, szabályos gúlára osztható, melyeknek alaplapja közös a^2 területű négyzet. Mindkét gúla magassága $a/\sqrt{2}$ (a síkbeli „kulcsábra” az alaplap egyik átlóján halad át), és így

$$O = 2 \cdot \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Fektessünk a tetraéder magasságán (melynek hossza h) és egy vele közös végpontú élen át síkot; a metszet (a síkbeli kulcsábra) két derékszögű háromszöget mutat, melyből

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{2a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{2a^2}{3},$$

és így

$$T = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Végül

$$O = 4T.$$

Második megoldás. Vizsgáljuk a $2a$ élhosszúságú szabályos tetraédert; térfogata 2^3T ; osszuk fel négy szabályos tetraéderre és egy O térfogatú szabályos oktaéderre négy olyan síkkal, amelyek mindegyike három-három ugyanazon csúcsban végződő él középpontján halad át. Egy-egy kisebb tetraéder térfogata T . Ezért

$$4T + O = 8T,$$

amiből ismét $O = 4T$.

2.53. A térfogatok aránya

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

a felszíneké:

$$\frac{b+c}{a} : \frac{c+a}{b} : \frac{a+b}{c}.$$

2.54. (Stanford, 1951.) A térfogatok különbsége, a csonka kúpé, mínusz a hengeré

$$\pi h \left[\frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right] = \frac{\pi h(a-b)^2}{12}$$

pozitív, kivéve $a = b$ -t, amikor a testek egybeesnek.

Az MPR I. kötet VIII. fejezete tartalmazza néhány algebrai egyenlőtlenség mértani alkalmazását.

2.55. Legyen r az $ABC\triangle$ köré írható kör sugara. Akkor

$$r^2 = h(2R - h), \quad r = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}a}{2},$$

és így

$$R = \frac{a^2}{6h} + \frac{h}{2}.$$

A $h/2$ tagot a gyakorlatban sokszor elhanyagolhatjuk.

2.57. 35 mérföld, lásd a 2.58. példát.

2.58. Az általánosításra szolgáló betű után zárójelben feljegyezzük mindegyik megadott számértéket:

- a (7/2) A sebessége,
 b (8/3) B sebessége,
 c (1) azon órák száma, amely a két elindulás között eltelt,
 d (59) a két elindulási pont közötti távolság. Akkor

$$x + y = d, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c, \quad x = \frac{a(bc + d)}{a + b}.$$

Newton az általánosított problémát a következőképp fogalmazta meg: „Adott két, ugyanazon hely felé tartó mozgó test, A és B sebessége, azzal a távolság-intervallummal és időkülönbséggel egyetemben, amely mozgásuk megkezdésekor fennáll; határozzuk meg azt a helyet, ahol találkoznak.”

2.59. (Stanford, 1959.) A következő jelölést használjuk:

- u András sebessége,
 v Béla sebessége,
 t_1 az indulástól a fiúk első találkozásáig eltelt idő,
 t_2 az indulástól a fiúk második találkozásáig eltelt idő,
 d a két ház keresett távolsága. Akkor

$$\begin{aligned}
 ut_1 &= a, & ut_2 &= d + b \\
 vt_1 &= d - a, & vt_2 &= 2d - b.
 \end{aligned}$$

(1) u/v -t kétféleképpen kifejezve, azt kapjuk, hogy

$$\frac{a}{d - a} = \frac{d + b}{2d - b}.$$

Innen az eltűnő gyököt figyelmen kívül hagyva, azt találjuk, hogy $d = 3a - b$.

(2) Természetesen András. Számszerűen: $u/v = 3/2$.

2.60. (Stanford, 1955.) Lásd a 2.61. példát.

2.61. Az elindulás és a között a pont között, ahol mind az $n + 1$ barát újból találkozik $2n - 1$ különböző szakasz van:

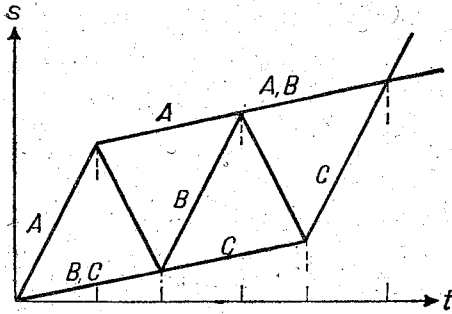
- (1) Béla A -val utazik
- (2) Béla egyedül utazik
- (3) Béla B -vel utazik
- (4) Béla egyedül utazik

.....

(2n - 1) Béla L -vel utazik

Az M.2.61. ábra az $n = 3$ -nak megfelelő 5 szakaszt mutatja. A , B és C utazását jelképező vonalakat ugyanezekkel a betűkkel jelöltük meg. Az ábrán könnyen felismerhetjük a koci útvonalát arról, hogy azt a meredekebb lejtésű szakaszok ábrázolják. Látjuk az elrendezés szimmetriájából (különösen világos az M.2.61. ábrából is), hogy mind az n páratlan számozású szakasznak ugyanaz az időtartama, mondjuk T , és mind az $n - 1$ páros számozásúé ugyanaz, mondjuk T' . Fejezzük ki a teljes $2n - 1$ szakaszon $[nT + (n - 1)T']$ időegység alatt megtett előrehaladást kétféleképpen (vegyük először Bélát, aztán egyik barátját):

$$nTc - (n - 1)T'c = Tc + (n - 1)(T + T')p,$$



M.2.61. ábra

ahonnan

$$\frac{T}{T'} = \frac{c + p}{c - p}.$$

(1) A társaság előrehaladásának sebessége:

$$\frac{nTc - (n-1)T'c}{nT + (n-1)T'} = c \frac{c + (2n-1)p}{(2n-1)c + p}.$$

(2) Az időnek az a hányada, melyben a kocsí egyedül Bélát viszi:

$$\frac{(n-1)T'}{nT + (n-1)T'} = \frac{(n-1)(c-p)}{(2n-1)c + p}.$$

(3) Az (1) és (2) eredmény extrém (szélsőséges) esetekben [bár $n = \infty$ -re (2) kevésbé közvetlenül] szemléletessé válik: $p = 0, \quad p = c, \quad n = 1, \quad n = \infty.$

(1) A haladás átlagsebessége $c/(2n-1), \quad c, \quad c, \quad p.$

(2) A menetidőnek az a hányada, melyben Béla egyedül kocsizik $(n-1)/(2n-1), \quad 0, \quad 0, \quad (c-p)/2c.$

2.62. Legyen a kő leesési ideje t_1 , a hang felérkezése t_2 .

$$T = t_1 + t_2, \quad d = gt_1^2/2, \quad d = ct_2.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$d = \{-c(2g)^{-1/2} + [c^2(2g)^{-1} + cT]^{1/2}\}^2.$$

MPR, I. kötet 165. old. és 264. old. 29. példa.

2.63. Vezessük be $\angle ACO = \beta'$ -t. Mivel

$$\frac{\sin \omega}{\sin \beta} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{\sin \omega'}{\sin \beta'} = \frac{AC}{AO},$$

így

$$\frac{\sin \omega}{\sin \omega'} \frac{\sin \beta'}{\sin \beta} = \frac{t}{t'}.$$

Másfelől $\beta' = \beta - (\omega' - \omega)$. Fejezzük ki $\sin \beta' / \sin \beta$ -t kétféleképpen, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} (\omega' - \omega) - \frac{t \sin \omega'}{t' \sin \omega \sin (\omega' - \omega)}.$$

2.64. A három egyenlet összeadásával azt nyerjük, hogy

$$0 = a + b + c.$$

Ha az adott a, b és c ezt a kapcsolatot *nem* elégíti ki, akkor „a probléma lehetetlen”, azaz nem létezik olyan x, y, z szám, amely a három egyenletet egyszerre elégítené ki. Ha a kapcsolat teljesül, a probléma *határozatlan*, végtelen sok megoldása van: az első két egyenletből

$$x = z + (3a + b)/7,$$

$$y = z + (2a + 3b)/7,$$

ahol z tetszőlegesen választható.

Hasonlítsuk össze az 1.43. és 1.44. példákkal.

2.65. (Stanford, 1955.) Az azonosság két oldalán levő ugyanazon kitevőjű hatványok együtthatóinak összehasonlításával 5 egyenletet nyerünk:

$$1 = p^2, \quad 4 = 2pq, \quad -2 = q^2 + 2pr, \quad -12 = 2qr, \quad 9 = r^2.$$

3 ismeretlenünkre, p, q és r -re. Az első egyenlet szerint $p = \pm 1$, ezért a két következő egyenlet, ha egymás után használjuk fel a p -re kapott értékeket, két megoldásrendszert határoz meg:

$$p = 1, \quad q = 2, \quad r = -3, \quad \text{és} \quad p = -1, \quad q = -2, \quad r = 3.$$

Történetesen mindkettő kielégíti a további két egyenletet is.

Rendszerint nem lehet gyököt vonni, mivel rendszerint lehetetlen olyan egyenletrendszert kielégíteni, melyben több egyenlet van, mint ismeretlen.

2.66. (Stanford, 1954.) A feltételezett azonosság jobb oldalát kifejtve és a megfelelő együtthatókat egyenlővé téve, nyerjük, hogy:

$$(1) aA = bB = cC = 1,$$

$$(2) bC + cB = cA + aC = aB + bA = 0.$$

$$(2)\text{-ből: } bc = -cB, cA = -aC, aB = -bA,$$

és a három egyenlet összeszorzásával: $abcABC = -abcABC$, vagyis $abcABC = 0$. Azonban (1)-ből: $abcABC = 1$.

Ez az ellentmondás megmutatja, hogy a feltételezett azonosság, melyből kiindultunk, lehetetlen.

Itt egy ellentmondást tartalmazó 6 egyenletből álló 6 ismeretlenes (a, b, c, A, B és C) egyenletrendszert mutattunk be.

2.67.

$$x = 5t, \quad y = 60 - 18t, \quad z = 40 + 13t$$

akkor és csak akkor pozitívak, ha $0 < t < 60/18$. Így t -re csak az 1, 2, 3 értékek jöhetnek számításba és (x, y, z) -re a következő három megoldásrendszert kapjuk:

$$(5, 42, 53), \quad (10, 24, 66), \quad (15, 6, 79).$$

2.68. A 2.67. példához hasonlóan az

$$x + y + z = 30$$

$$14x + 11y + 9z = 360$$

rendszerrel kielégítik:

$$x = 2t, \quad y = 45 - 5t, \quad z = 3t - 15,$$

$$t = 5, 6, 7, 8 \text{ vagy } 9.$$

2.69.

$$100 + x = y^2, \quad 168 + x = z^2.$$

Kivonással

$$(z - y)(z + y) = 68.$$

Mivel $68 = 2^2 \cdot 17$, kéttényezős szorzatra háromféleképpen bontható:

$$68 = 1 \cdot 68 = 2 \cdot 34 = 4 \cdot 17.$$

példánkban y és z vagy csak páratlan lehet, vagy csak páros. Így pontosan egy megoldás van:

$$z - y = 2, \quad z + y = 34, \quad z = 18, \quad y = 16, \quad x = 156.$$

2.70. (Stanford, 1957.) Bélának x bélyege van. Ennek y heted része van a második könyvben; x és y pozitív egész számok,

$$\frac{2x}{10} + \frac{yx}{7} + 303 = x,$$

és innen

$$x = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 101}{28 - 5y}.$$

A jobb oldalon a nevező pozitív és páratlan, mert osztója a számlálónak, amely páratlan. Három lehetőségünk lenne: $y = 1, 3$ és 5 , de csak az utolsó megfelelő: $y = 5$, és $x = 3535$ egyértelműen meghatározott.

2.71. (Stanford, 1960.) Ha a leszállított ár x forint, és a visszamaradó készletben y toll volt,

$$x < 50 \quad \text{és} \quad xy = 3193.$$

Mivel $3193 = 31 \times 103$ két törzstényező szorzata, így pontosan négy különböző osztója van: $1, 31, 103$ és 3193 . Ha feltételezzük, hogy x egész szám, akkor $x = 1$ vagy 31 . Ha azt is feltételezzük, hogy $x > 1$, akkor $x = 31$.

2.75. (1) *Ellentmondás*. Vagy a három sík között van két különböző és párhuzamos; vagy bármelyik két sík metszi egymást, és a három metszésvonal különböző és párhuzamos.

(2) *Függőség*: A síkoknak közös egyenesük van; kettő vagy éppen mind a három egybeeshet.

(3) *Ellentmondás-mentesség és függetlenség*. Pontosán egy közös pontjuk van, a metszéspont.

2.78. A használatban levő középiskolai példatárak nagyszámú, de nem nagyon változatos „szöveges példát” tartalmaznak. Rendszerint azonban épp olyan alkal-

mazások és kérdések hiányoznak, amelyek a „Descartes-i megoldástípus” általános fontosságára fényt vetnének.

Az előző példákából megtanulhatja az olvasó, hogyan kell hasznos kérdésekkel egybekötni azt a problémát, amelyet éppen megoldott. Felsorolok néhány ilyen kérdést, mindegyikhez egy-egy magyarázó példára utalva (az olvasó nézzen további, a mondottakat megvilágító példa után):

Ellenőrizhetjük-e az eredményt? (2.4. példa.)

Ellenőrizzük a határeseteket (elfajult, extrém eseteket). (2.14. példa.)

Levezethetjük-e az eredményt másképpen is? Hasonlítsuk össze a különböző kiindulásokat. (2.8. példa.)

Tudunk-e az eredménynek más értelmezést is tulajdonítani? (2.3. példa.)

Általánosítsuk a feladatot. (2.2. példa.)

Találjunk ki analóg feladatot. (2.47. példa.)

Valamely feladatból kiindulva az előző és hasonló kérdéseket feltéve, az olvasó új feladatokat eszelhet ki, és esetleg találhat néhány érdekes és nem túlságosan nehéz feladatot. Mindenesetre, ha ilyen kérdéseket tesz fel, jó alkalma nyílik a kiindulási probléma megértésében való elmélyedésre és problémamegoldó-képességének a tökéletesítésére.

Végül itt van két (nem nagyon könnyű), az előzőekhez kapcsolódó feladat.

(I) Ellenőrizzük a 2.35. példa eredményét

(1) annak feltételezésével, hogy $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$, $\alpha + \beta = 90^\circ$;

(2) annak feltételezésével, hogy $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$, de $\alpha + \beta$ érték előírása nélkül.

(3) δ , γ , β és α -t helyettesítsünk rendre α , β , γ és δ helyébe.

(II) Tárgyaljunk a 2.45. példához analóg térmértani példákat. (A 3.39. példában van erre útmutatás.)

Nincs megoldás: 2.56., 2.72., 2.73., 2.74., 2.76., 2.77.

3. Fejezet

3.1. $n = 0$ és $n = 1$ -re az állítás nyilvánvaló. Tételezzük fel, hogy n valamilyen értékére

$$(1+x)^n = 1 + \dots + \binom{n}{r-1} x^{r-1} + \binom{n}{r} x^r + \dots + x^n$$

igaz.

Mindkét oldalt $(1+x)$ -szel szorozva

$$(1+x)^{n+1} = 1 + \dots + \left[\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} \right] x^r + \dots + x^{n+1}.$$

A 3.6.(2) pont rekurzív képletéből $(1+x)^{n+1}$ -ben x^r együtthatójára az adódik, hogy

$$\binom{n+1}{r},$$

és így, ha a binomiális tétel n -re érvényes, akkor érvényes $n+1$ -re is. Figyeljük meg, hogy a 3.6.(2) pont *határfeltételét* is használtuk. Hol?

3.2. Tételezzük fel a 3.1. példa eredményét, és legyen

$$x = \frac{b}{a},$$

akkor

$$a^n(1+x)^n = (a+b)^n$$

3.3. Tekintsük sejtésnek (eredetileg az is volt) azt az állítást, hogy „ S_p pontosan $(p+1)$ -ed fokú polinom”. Ez a sejtés biztosan igaz a $p=0, 1$ és 2 speciális esetekben (melyek erre a sejtésre vezettek; lásd a 3.3. pont elejét). *Tételezzük fel* azt, hogy egészen $(k-1)$ -ig igazoltuk ezt a sejtést, azaz $p=0, 1, 2, \dots, k-1$ -re ($S_0, S_1, S_2, \dots, S_{k-1}$ -re). Akkor következtethetünk arra, hogy (tekintsük a 3.4. pont utolsó egyenletét)

$$\binom{k+1}{2} S_{k-1} + \binom{k+1}{3} S_{k-2} + \dots + S_0 = P$$

(P -t mint rövidítést vezetjük be) k -ad fokú polinom. Viszont ebből az egyenletből következik, hogy

$$(1) \quad S_k = \frac{(n+1)^{k+1} - 1 - P}{k+1}.$$

Mivel P az n -ben k -ad fokú, $(n+1)^{k+1}$ legmagasabb fokú tagja, n^{k+1} nem eshet ki, és így képletünk azt mutatja, hogy S_k az n -nek $(k+1)$ -ed fokú polinomja. Erre a következtetésre úgy jutottunk, hogy feltételeztük azt, hogy S_0 pontosan elsőfokú, S_1 pontosan másodfokú, ... és S_{k-1} pontosan k -ad fokú.

Intuitíve kifejezve, S_k tárgyaltsági sajátságának [annak, hogy $(k+1)$ -ed fokú] az a „megmásíthatatlan igyekezete, hogy tovább terjedjen”. Jóval előbb beláttuk, hogy S_0, S_1 és S_2 -nek megvan ez a sajátsága, de akkor előző bizonyításunk szerint meg kell lennie S_3 -nak is, továbbá ugyanezen bizonyítás szerint S_4 -nek is, aztán S_5 -nek is és így tovább.

Az (1) képletből az is világos, hogy S_k legmagasabb fokú tagjának az együtthatója, amint állítottuk, $\frac{1}{k+1}$.

A most bebizonyított eredményt néhány ezután következő példa más felfogásban tárgyalja. Lásd a 4.2–4.7. példákat.

3.4.

$$S_4 = S_2 \frac{6S_1 - 1}{5} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}.$$

Bizonyítás teljes indukcióval a szokásos típus szerint; lásd MPR. 1. kötet, 108–120. old.

3.5. A 3.2., 3.3. és 3.4. pontok és a 3.3. példa vezet a megoldástípushoz.

3.6. A 3.4. pont analogonja:

$$n^k - (n-1)^k = \binom{k}{1} n^{k-1} - \binom{k}{2} n^{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k}.$$

3.7. Hasonló a 3.4. ponthoz:

$$\begin{aligned} [n(n+1)]^k - [(n-1)n]^k &= n^k [(n+1)^k - (n-1)^k] = \\ &= 2 \binom{k}{1} n^{2k-1} + 2 \binom{k}{3} n^{2k-3} + 2 \binom{k}{5} n^{2k-5} + \dots \end{aligned}$$

3.8. Hasonló a 3.4. ponthoz:

$$\begin{aligned} & (2n+1)[n(n+1)]^k - (2n-1)[(n-1)n]^k = \\ & = n^k[(n+1)^k + (n-1)^k] + 2n^{k+1}[(n+1)^k - (n-1)^k] \\ & = 2 \left[\binom{k}{0} + 2 \binom{k}{1} \right] n^{2k} + 2 \left[\binom{k}{2} + 2 \binom{k}{3} \right] n^{2k-2} + \dots \end{aligned}$$

3.9. A 3.7. példából rekurzióval és teljes indukcióval.

3.10. A 3.8. példából rekurzióval és teljes indukcióval.

3.11. A 3.9. és 3.10. példák megoldása után elég igazolnunk az állítást $S_1(x)$ -re és azt, hogy

$$S_2(x) = S_1(x) \frac{2x+1}{3}.$$

3.12. a) A „kis Gauss módszere” szerint (a 3.1. pont első kiindulása):

$$[1 + (2n-1)] + [3 + (2n-3)] + \dots = 2n \cdot \frac{n}{2} = n^2$$

b) A 3.1. pont második kiindulása; lásd a következőt.

c) Általánosítsunk; vizsgáljuk annak a számtani sornak az összegét, melynek első tagja a , különbsége d , és n tagja van:

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + [a + (n-1)d].$$

Legyen az utolsó tag $a + (n-1)d = b$; akkor (ez a 3.1. pont második kiindulása)

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (b-2d) + (b-d) + b,$$

$$S = b + (b-d) + (b-2d) + \dots + (a+2d) + (a-d) + a.$$

Összeadva, és 2-vel osztva

$$S = \frac{a+b}{2} n.$$

Ha speciálisan: $a = 1$, $b = 2n-1$; akkor

$$S = \frac{1 + (2n-1)}{2} n = n^2.$$

d) Nézzük meg a 3.9. ábrát.

e) Lásd a 3.13. példát.

$$\begin{aligned} 3.13. \quad & 1 + 4 + 16 + \dots + (2n-1)^2 + (2n)^2 - 4(1 + 4 + \dots + n^2) = \\ & = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(4n^2-1)}{3}. \end{aligned}$$

3.14. Kövessük a 3.13. példát:

$$\frac{4n^2(2n+1)^2}{4} - 8 \frac{n^2(n+1)^2}{4} = n^2(2n^2-1).$$

3.15. Használjuk a 3.11. példa jelölését:

$$1^k + 3^k + \dots + (2n-1)^k = S_k(2n) - 2^k S_k(n).$$

3.16. Néha könnyebb több kérdésre válaszolni, mint egyre. (Ez „az igényesség paradoxona”: lásd GI. 64. old.) Vizsgáljuk a

$$2^2 + 5^2 + 8^2 + \dots + (3n-1)^2 = U$$

sorral együtt az

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + \dots + (3n-2)^2 = V$$

sor összegét is. Akkor (a 3.15. példát követve)

$$U + V + 9S_2(n) = S_2(3n).$$

Továbbá

$$U - V = 3 + 9 + 15 + \dots + (6n-3) = 3n^2.$$

A két ismeretlenre, U -ra és V -re, két első fokú egyenletből álló egyenletrendszerünk van, melyből nemcsak a keresett

$$U = n(6n^2 + 3n - 1)/2$$

adódik, hanem

$$V = n(6n^2 - 3n - 1)/2$$

is. A 3.17. példa megoldásában más módszert alkalmazunk.

3.17. (L. Pascal, idézett mű 3. fejezet, 3. lábjegyzet.) A 3.3. pont jelölését általánosítva (ahol is az $a = d = 1$ speciális esettel foglalkoztunk), legyen

$$S_k = a^k + (a+d)^k + (a+2d)^k + \dots + [a+(n-1)d]^k.$$

Nyilvánvalóan $S_0 = n$. Helyettesítsünk n helyébe $1, 2, 3, \dots, n$ -et a következő összefüggésben:

$$\begin{aligned} & (a+nd)^{k+1} - [a+(n-1)d]^{k+1} = \\ &= \binom{k+1}{1} [a+(n-1)d]^k d + \binom{k+1}{2} [a+(n-1)d]^{k-1} d^2 + \dots \end{aligned}$$

Összeadva, azt kapjuk, hogy

$$(a+dn)^{k+1} - a^{k+1} = \binom{k+1}{1} S_k d + \binom{k+1}{2} S_{k-1} d^2 + \dots + S_0 d^{k+1}.$$

Innen S_1, S_2, \dots, S_k -t, egyiket a másik után, rekurzíven meghatározhatjuk. Végezzük el a számítást részleteiben az $a = 2, d = 3, k = 2$ esetben; lásd a 3.16. példát.

3.18. A keresett összeg

$$\begin{aligned} & \frac{1 \cdot 2}{2} 2 + \frac{2 \cdot 3}{2} 3 + \frac{3 \cdot 4}{2} 4 + \dots + \frac{(n-1)n}{2} n = \\ &= \frac{1}{2} [(2^3 - 2^2 + 3^3 - 3^2 + 4^3 - 4^2 + \dots + n^3 - n^2)] = \\ &= \frac{1}{2} (S_3 - S_2) = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24} \end{aligned}$$

a 3.2. és 3.3. pont eredménye szerint.

$$3.19. a) \frac{n(n^2-1)}{6}; \quad b) 1^{n-1} 2^{n-2} 3^{n-3} \dots (n-1)^1; \quad c) \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

3.20. E_1 -et a 3.1. pontban és E_2 -t a 3.18. példában már kiszámítottuk. Hatásosabb eljárás alapul az algebra egyik klasszikus részén — az elemi szimmetrikus függvényeket kifejezhetjük hatványok összegével:

$$E_1 = S_1$$

$$E_2 = (S_1^2 - S_2)/2$$

$$E_3 = (S_1^3 + 2S_3 - 3S_1S_2)/6$$

$$E_4 = (S_1^4 + 3S_2^2 + 8S_1S_3 - 6S_1^2S_2 - 6S_4)/24.$$

Vessük ezt egybe előző eredményeinkkel (3.1., 3.2., 3.3. pont, 3.4. példa). Ha egybevetjük még E_k általános, S_1, S_2, \dots, S_k tagokban egyenlő súlyú (izobár) kifejezésének bizonyos sajátságait is a 3.9. és 3.10. példával, akkor nemcsak a fokszámot, hanem a legmagasabb fokú tag együtthatóját is megkapjuk:

$$E_k(n) = \frac{n^{2k}}{k!2^k} + \dots$$

és levezethetjük azt, hogy $k \geq 2$ -re, $E_k(n)$ osztható a következő kifejezéssel:

$$(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1) [n(n+1)]^{(3-(-1)^k)/2}.$$

3.21. Az *a)* eljárás speciális esete *b)*-nek. Ha A_{n+1} állítás egyedül már az A_n -ből is következik, akkor A_1, A_2, \dots, A_{n-1} és A_n állításokból együttvéve *a fortiori* (még sokkal inkább) következik. Így hát, ha a (IIa) állítás helyes, akkor a (IIb) állítás is az. Ezért, ha a *b)* eljárást elfogadjuk, akkor el kell fogadnunk az *a)* eljárást is.

b) eljárást az *a)* eljárásra vezethetjük vissza. Jelentse B_n az A_1, A_2, \dots, A_{n-1} és A_n állítások együttes állítását. Akkor

(I) állítás azt jelenti: B_1 igaz.

A IIb állítás tömörebben: B_n -ből következik B_{n+1} .

Ezért, ha az állítások A_1, A_2, A_3, \dots sorozatára vonatkozó állítást tömören fogalmazzuk, akkor az (I) és (IIb) állításból (I) és (IIa) állítás lesz, ahol A_n -t B_n -nel helyettesítettük (természetesen $n = 1, 2, 3, \dots$ -ra).

3.22. A 3.3. ábrát úgy tekinthetjük, hogy ez mutatja be azt az esetet, melyben Béla, Karesi, Dini, Rezső és Attila verik fel a sátrát, és a másik öt fiú (Rudi, Albi, Andris, Anti és Balázs — északkelet-délnyugat irányú tömbök —) főzik a vacsorát. Ebből a konkrét esetből kiindulva beláthatjuk, hogy a tíz fiú minden egyes két ötös csoportra osztásának a 3.3. ábrában megfelel egy, a csúcstól az alsó ponthoz vezető legrövidebb zezzugos útvonal, és viszont, minden ilyen zezzugos útvonalnak megfelel egy ilyen felosztás; a megfeleltetés egy-egy értelmű. Ezért a felosztások keresett száma 252 (lásd a 3.3. ábrát).

3.23. Mi általános feladattal állunk szemben. A 3.22. példa és 3.3. ábra azonban reprezentáló speciális esetet ad. (Lásd MPR. 1. kötet, 25. old. 10. példa).

Számozzuk az elemeket 1-től n -ig, és feleljen meg a Pascal-háromszög k -adik alapjának (vízszintes sor) a k -adik elem. Egy elem akkor és csak akkor tartozik a részhalmazhoz, ha a zezzugos útvonal a neki megfelelő sort lefelé haladva északnyugatról

délkeletre tartó tömb mentén éri el. Ezen a módon minden j számosságú részhalmazt, melyet az adott n számosságú halmaz tartalmaz, egy rögzített pontban végződő zezugos útvonallal szemléltethetünk. A zezugos útvonalak megszámlálásával a részhalmazokat is megszámláljuk.

$$3.24. \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \text{ egyenes, } \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ háromszög.}$$

3.25. Adott n pont a térben „általános helyzetben”;

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

száma olyan tetraéderünk van, melyeknek csúcsait az adott n pontból választottuk.

3.26.

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

3.27. Az adott konvex poligon belsejében egymást metsző két átló olyan konvex négyszög átlója, melynek négy csúcsa az adott n -ből való. Ezért a kérdzett metszéspontok száma

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

3.28. A piros lapot

$$\binom{6}{1} = 6$$

különböző módon választhatjuk. A megmaradó öt lap közül a két kéket

$$\binom{5}{2} = 10$$

féleképpen. Ezért a hat lapot a három színnel az előírásnak megfelelően

$$\binom{6}{1} \binom{5}{2} = 6 \times 10 = 60$$

különböző módon lehet befesteni.

3.29.

$$\binom{n}{p} \binom{k+b}{k} = \frac{n!(k+b)!}{p!(n-p)!k!b!} = \frac{n!}{p!k!b!}.$$

3.30. n elemből álló halmazt h , egymást részben sem fedő (dísjunktív) részhalmazra osztunk (azaz két különböző részhalmaznak nincs közös eleme). Az első részhalmaznak r_1 , a másodiknak r_2 , ..., és az utolsónak r_h eleme van, és

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_h = n.$$

Akkor

$$\frac{n!}{r_1! r_2! r_3! \dots r_h!}$$

különböző ilyen felosztás van. A részhalmazok megszámozása vagy megjelölése lényeges: megtörténhet, hogy az r_1, r_2, \dots, r_h számok közül néhány egyenlő, de akkor gondosan különbséget kell tennünk az azonos számosságú különbözően jelölt részhalmazok között. Ahogyan a 3.22. példában is különbséget tettünk a között az öt személy között, akik sátrat vertek, és a másik öt személy között, akik vacsorát főztek; vagy ami végső soron ugyanaz: a 3.3. ábrában különbséget tettünk olyan két zezugos útvonal között, amelyek az ábra középvonalára (a kezdő A -t a befejező A -val összekötő egyenes vonalra) vonatkozóan egymásnak tükörképei. Vagy a 3.29. példában p lapnak előre meghatározott színe van, mely különbözik a k lapétól, még ha úgy is volna, hogy p és k számértéke történetesen megegyezik.

3.31. Ehhez az összefüggéshez a 3.8. pontban jelzett mind a négy értelmezés (interpretálás) és a 3.23. példa segítségével is eljuthatunk.

(1) Az úthálózat a Pascal-háromszög csúcsán keresztül húzható függőlegesre vonatkozóan szimmetrikus.

(2) Ugyanez a szimmetria a rekurziós képletben és a határfeltételekben is megmutatkozik.

(3) A faktoriális jelölést használva:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m = m!,$$

így

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} &= \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r} = \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)(n-r) \dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots r \cdot (n-r) \dots 2 \cdot 1} = \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{n-r}. \end{aligned}$$

(4) Mivel $(a+b)^n$ változatlan marad, ha a -t és b -t felcseréljük, kifejtésünknek ugyanazt az együtthatót kell adnia $a^r b^{n-r}$ és $a^{n-r} b^r$ -re.

(5) Ha n elemből álló halmazból r elemből álló részhalmazt választunk ki, akkor egy $n-r$ elemből álló másik részhalmazt otthagynak. Ezért ahány részhalmaz van az egyik félemből, ugyanannyi van a másik félemből is.

$$3.32. \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Bizonyítás: tegyük $a = b = 1$ -et az $(a+b)^n$ kifejtésébe. Másik bizonyítás: A Pascal-háromszög csúcsától az n -edik sorhoz 2^n számú legrövidebb zezugos útvonal vezet; ha ui. a 3.3. ábrában egy délnek tartó utat választunk, bármely utcasarkon (bármelyik alapon) áthaladva két lehetőség között választhatunk. És még egy bizonyítás: minden n elemből álló halmaznak 2^n részhalmaz van, az üres halmazt és a teljes halmazt is beleértve. (Ezeknek a számát az $\binom{n}{0}$, illetve $\binom{n}{n}$ kifejezés adja meg.) Ez világos, mivel egy részhalmaz kiválasztásakor az n elem akármelyikét bevehetjük, vagy kihagyhatjuk.

$$3.33. \quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0,$$

ha $n \geq 1$. Tegyük $a = 1$ -et és $b = -1$ -et az $(a+b)^n$ kifejtésébe.

Másik bizonyítás: Határfeltétellel és rekurziós képlettel

$$\binom{n}{0} = \binom{n-1}{0}$$

$$-\binom{n}{1} = -\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1}$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}$$

$$(-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} = (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-2} + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1}$$

$$(-1)^n \binom{n}{n} = (-1)^n \binom{n-1}{n-1}$$

Adjuk össze!

És még egy bizonyítás: Mindegyik zezgugos útvonal az $(n-1)$ -edik sor elérése után két, az n -edik sorhoz tartozó útvonalban folytatódik, ezek közül az egyik „pozitív” sarokhoz ($r = 0, 2, 4, \dots$) és a másik „negatív” sarokhoz ($r = 1, 3, 5, \dots$) vezet.

3.34. Hasonlóan (negyedik utca)

$$1 + 5 + 15 + 35 = 56$$

általában (r -edik utca)

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Bizonyítás teljes indukcióval: Az állítás $n = r$ -re igaz:

$$\binom{r}{r} = \binom{r+1}{r+1}$$

a határfeltétel szerint.

Feltételezzük, hogy az állítás n bizonyos értékéig fennáll. A feltételezett egyenlőség mindkét oldalához adjuk ugyanazt a mennyiséget, a rekurziós képlet szerint azt találjuk, hogy

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \dots + \binom{n}{r} + \binom{n+1}{r} = \binom{n+1}{r+1} + \binom{n+1}{r} = \binom{n+2}{r+1},$$

és így az állítás $n+1$ -re következik.

Ezzel a tételt $n \geq r$ -re bebizonyítottuk.

Másik bizonyítás: A 3.7.(I) ábrában A a Pascal-háromszög csúcsa, és L egy az $n+1, r+1$ értékekkel megadott pont; az A -ból L -hez vezető legrövidebb zezgugos útvonalak száma $\binom{n+1}{r+1}$. Mindegyik útvonal valamilyen utcán át jut az r -edik-

ből az $(r + 1)$ -edik utcába; a rendre egymás után következő utcákat használó útvonalak száma

$$\binom{r}{r}, \binom{r+1}{r}, \binom{r+2}{r}, \dots, \binom{n}{r},$$

és így ezek összege, a kért útvonalak összes száma $\binom{n+1}{r+1}$, amint ezt állítottuk.

3.35. Adjuk össze először a 3.5. ábrában az északnyugati határvonal mentén (0-adik utca), azután az első, azután a második ... és végül az ötödik utca mentén a számokat. A kapott összeg rendre:

$$6, 21, 56, 126, 252, 462.$$

Ezeknek a számoknak az összege 923. Ezt a számot hiába keressük a 3.5. ábrában mutatott Pascal-háromszög töredékének a környékén. De mindjárt megtaláljuk a következő számot:

$$924 = \binom{12}{6}.$$

Figyeljük meg, hogy az összeadások terhétől megszabadulhattunk volna (még a hetedikről is) ha felhasználtuk volna a 3.34. példát és a binomiális együtthatók táblázatát. Reprezentáns példánkból kiindulva, könnyen bebizonyíthatjuk, hogy általánosan

$$\sum_{l=0}^m \sum_{r=0}^n \binom{l+r}{r} = \binom{m+n+2}{m+1} - 1.$$

3.36. A felírt egyenlet bal oldalán az első tényezőket a Pascal-háromszög ötödik, a második tényezőket a negyedik sorából vettük; a jobb oldalt a kilencedik sorban találjuk meg. Az $1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 1 = 56$ egyenlőségben az előzőhöz hasonlóan az ötödik, a harmadik és a nyolcadik sor szerepel. A 3.9. pontban tárgyalt általánosabb eset az n -edik, ismét az n -edik és a $2n$ -edik sorra hasonlóan vonatkozott. Ezek a példák a következő általános tételre vezetnek:

$$\binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \binom{m}{2} \binom{n}{r-2} + \dots + \binom{m}{r} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}.$$

Itt szimbólumunk jelentésének kiterjesztését engedjük meg; a 3.65.(III) példában formális tárgyalás következik.

A 3.9. pontban található mindkét bizonyítást kiterjeszthetjük erre az általánosabb esetre is. A mértani kiindulásra a 3.7. ábrában (II) és (III) összehasonlítása vezet, az algebrai pedig abban áll, hogy az

$$(1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$$

kifejezésben x^r együtthatóját kétféleképpen számítjuk ki.

3.37. A felírt egyenlet bal oldalán az első tényezőket a Pascal-háromszög első, a második tényezőket a második utcájáról, a jobb oldalt pedig a negyedikről vettük. Az alábbi példában:

$$1 \cdot 10 + 3 \cdot 6 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 1 = 56$$

a második, ismét a második és az ötödik utca szerepel analóg módon. Az általános esetnek, amint azt a 3.34. példában és 3.7.(I) ábrán látjuk, a 0-adik, r -edik és $(r+1)$ -edik utcával kapcsolatban, analóg értelmet tulajdoníthatunk. Ezek a példák általános tételre mutatnak:

$$\binom{r}{r} \binom{s+n}{s} + \binom{r+1}{r} \binom{s+n-1}{s} + \binom{r+2}{r} \binom{s+n-2}{s} + \dots + \binom{r+n}{r} \binom{s}{s} = \binom{r+s+n+1}{r+s+1}.$$

Mértani bizonyítás (általánosabb, mint a 3.34. példa mértani bizonyítása, a 3.9. pontban szereplő bizonyítás és 3.36. példa analogonja). A 3.7.(IV) ábrában az L pont helyzetét meghatározó számok: $r+1+s+n$ (a tömbök összes száma) és $r+1+s$ (tömbök száma jobbra lefelé). Így az A csúctól az L pontig a legrövidebb zezugos útvonalak száma

$$\binom{r+s+n+1}{r+s+1}.$$

Mindegyik útvonal az r -edik utcától az $(r+1)$ -edikhez egy utcával kapcsolódik. A kapcsolódó utcák szerint osztályozzuk a felírt képlet bal oldalán az útvonalakat, és külön-külön számoljunk meg minden egyes osztályt, a jobb oldalon az összes kérdéses útvonalat együtt számoljuk.

Itt kíváncsi lenné párhuzamot vonni 3.9.(2) és a 3.36. példa között, ahol a képletet két sor szorzásából vezettük le, de ez kevésbé látszik közvetlennek, és itt hézag is van. Jó volna valami kapcsolatot találni (algebrai?) a két hasonló képlet között, melyeket most és az előző, 3.36. példában kaptunk: megint egy hézag.

3.38. Az n -edik trianguláris szám

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

A trianguláris számok 1, 3, 6, 10, ... alkotják a Pascal-háromszög második utcáját.

3.39. Az n -edik piramidális szám

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Ehhez a 3.34. példát használtuk. A piramidális számok 1, 4, 10, 20, ... a Pascal-háromszög negyedik utcáját alkotják.

Megjegyzés. A trianguláris és a piramidális szám kifejezése előbb volt ismert, mint a binomiális együtthatók általános, explicit képlete (3.7. pont), és teljes indukcióval az általános képlet felfedezésére vezethet.

$$\mathbf{3.40.} \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3.41. A szorzat azoknak a legrövidebb zezugos útvonalaknak a száma, amelyek a csúcsot az

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_h$$

(összes tömbök száma) és

$$j = j_1 + j_2 + \dots + j_h$$

(tömbök északnyugatról délkeletre) számok által meghatározott ponttal kötik össze, és pedig úgy, hogy $h - 1$ adott közbeeső ponton is áthaladnak; a $h - 1$ pontot — analóg módon — a következő számok határozzák meg:

$$\begin{array}{ll} n_1 & \text{és } j_1 \\ n_1 + n_2 & \text{és } j_1 + j_2 \\ \dots\dots\dots & \\ n_1 + n_2 + \dots + n_{h-1} & \text{és } j_1 + j_2 + \dots + j_{h-1}. \end{array}$$

3.42. a) A 3.10. ábra két, a halmazhoz tartozó, de az (1) részhalmazhoz *nem* tartozó útvonalat mutat. Ezeknek ugyanaz az A kezdőpontjuk, ugyanaz a C végpontjuk, ugyanazon a közbeeső B ponton mennek át, amely a szimmetriatengelyen fekszik, és mindegyik útvonalat két ívre, AB -re és BC -re osztja. Az AB ívek a szimmetriatengelyre vonatkoztatva szimmetrikusak egymással, és egyiküknek sincs a szimmetriatengellyel közös *belső* pontjuk; a BC ívek egybeesnek. A két útvonal közül az egyik a (2), a másik a (3) részhalmazhoz tartozik. Viszont ezekhez a részhalmazokhoz tartozó útvonalak a 3.10. ábrán bemutatott módon párosíthatóak egymással: tekintsük B -t, az útvonal második közös pontját a szimmetriatengellyel (az A csúcs az első ilyen közös pont). Ilyen párosítással a (2) és (3) részhalmazok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk.

b) Másként is párosíthatunk: míg a 3.10. ábrában a két AB törtvonal az A és B pontokat összekötő egyenesre vonatkozóan, addig a 3.11. ábrában az AB szakasz középpontjára vonatkoztatva szimmetrikus egymással.

c) Az *a*)-ból vagy *b*)-ből következik, hogy

$$\binom{n}{j} = N + 2 \binom{n-1}{j}.$$

A következő két összefüggésből, felhasználva először az elsőt, azután a másodikat,

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j}, \quad \binom{n-1}{j} = \frac{n-j}{n} \binom{n}{j}.$$

két különböző kifejezést kapunk:

$$N = \binom{n-1}{j-1} - \binom{n-1}{j} = \frac{2j-n}{n} \binom{n}{j}.$$

A levezetésnél feltételeztük, hogy $2j > n$. Felhasználva a Pascal-háromszög szimmetriáját, könnyen megszabadulhatunk ettől a korlátozástól.

3.43. Teljes indukcióval. Az ábra vizsgálatával igazoljuk az előre kimondott eredményt, ha $n = 1, 2, 3$ ($m = 0, 1$).

$2m$ -ről $(2m+1)$ -re. Ha $2m$ hosszú útvonalunkat, melynek a csúcsot kivéve a szimmetriatengellyel közös pontja nincs, egy tömbbel meghosszabbítjuk, két, ugyanilyen, $(2m+1)$ hosszúságú útvonalat nyerünk. A kimondott eredményt $n = 2m$ -re feltételezve, $n = (2m+1)$ -re azt kapjuk, hogy a keresett szám

$$2 \binom{2m}{m}.$$

$(2m+1)$ -ről $(2m+2)$ -re. Ha $(2m+1)$ hosszúságú, adott tulajdonságú (lásd fent) útvonalunkat egy tömbbel meghosszabbítjuk, akkor legtöbbször két ugyanilyen, $(2m+2)$ hosszúságú útvonalat nyerünk: kivételt alkotnak azok az útvonalak, amelyek a $(2m+1)$ -edik soron, a szimmetriavonalhoz legközelebb eső két pontban végződnek. Képzeljük el ezt az esetet, feltételezzük az eredményt $n = (2m+1)$ -re, és használjuk fel a 3.42. példa erre alkalmas speciális esetét. Így azt kapjuk $n = (2m+2)$ -re, hogy a keresett érték

$$4 \binom{2m}{m} - 2 \frac{1}{2m+1} \binom{2m+1}{m+1},$$

melyről, alkalmas átalakítások után, kiderül, hogy

$$\binom{2m+2}{m+1}.$$

Teljes indukció nélkül. Használjuk fel a 3.42. példában c) alatt N -re kapott első kifejezést, és fejtsük ki a következő összeget olyan j értékekre, melyekre $n/2 < j \leq n$:

$$2 \sum \left[\binom{n-1}{j-1} - \binom{n-1}{j} \right]$$

ez a keresett szám, mely, ha gondosan megkülönböztetjük az $n = 2m$ esetet az $n = 2m+1$ esettől, állításunkat adja.

3.44. 0, 1, 6, 21, 50, 90, 126, 141, 126, ...

0, 1, 7, 28, 77, 161, 266, 357, 393, 357, ...

1, 393 és 1 nem oszthatók, a hetedik sor többi száma osztható héttel.

3.45. 3.1. példa analagonja.

3.46. 3.31. példa analagonja.

3.47. 3.32. példa analagonja.

3.48. 3.33. példa analagonja.

3.49. A 3.9. pont analagonja; széles körű általánosítása a 3.36. példa analagonja.

3.50. Északkeletről délnyugatra haladó számsorozatok.

1, 1, 1, 1, 1, ...

1, 2, 3, 4, 5, ...

1, 3, 6, 10, 15, ...

A Pascal-háromszögnek is utcai.

3.51. Az első sorokban látható szimmetria állandósul; elég a két sort a középig kiírni (a hetediket és nyolcadikat)

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{56} \quad \frac{1}{168} \quad \frac{1}{280}$$

$$\frac{1}{9} \quad \frac{1}{72} \quad \frac{1}{252} \quad \frac{1}{504} \quad \frac{1}{630}$$

3.52. A harmonikus háromszög adott során a nevezők a binomiális együtthatókkal arányosak, az arányossági tényezőt a szélső elemeken láthatjuk. Jobban kifejtve azt:

találjuk, hogy a két háromszögben a megfelelő helyeken álló számok

$$\begin{array}{cc} \binom{n}{r} & \frac{1}{(n+1)\binom{n}{r}} \\ \text{Pascal} & \text{Leibniz} \end{array}$$

Bizonyítás. $r = 0$ -ra a harmonikus háromszög határfeltételét igazoltuk. A rekurziós képlet igazolására először a binomiális együtthatók rekurziós képletét használjuk, majd explicit alakját.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)\binom{n}{r-1}} + \frac{1}{(n+1)\binom{n}{r}} &= \frac{\binom{n+1}{r}}{(n+1)\binom{n}{r-1}\binom{n}{r}} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} \cdot \frac{(r-1)!(n-r+1)!}{n!} \cdot \frac{r!(n-r)!}{n!} = \\ &= \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!} = \frac{1}{n\binom{n-1}{r-1}}. \end{aligned}$$

3.53. A bal oldalon a 3.13. ábra egyik délnyugat felé tartó utcájának a kezdő-eleme, a jobb oldalon a következő ilyen irányú utca összes elemének az összege áll. A bizonyításhoz lásd a 3.54. példa megoldását.

3.54. Használjuk fel a Leibniz-háromszög rekurziós képletét:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} - \frac{1}{12} &= \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} - \frac{1}{20} &= \frac{1}{30} \\ \frac{1}{20} - \frac{1}{30} &= \frac{1}{60} \\ \frac{1}{30} - \frac{1}{42} &= \frac{1}{105} \end{aligned}$$

Adjuk össze! (A második balra lefelé haladó utca „távoli” eleme „elhanyagolható”.) Ebből a reprezentáns speciális esetből kiindulva, könnyen haladhatunk az általános tételhez: Vegyük tekintetbe a Leibniz-háromszög egyik, a 0-adiktól különböző, délnyugat felé tartó utcáját. Valamelyik kezdőelemtől délnyugatra fekvő összes elem (végtelen sok van) összege a kezdőelem északnyugati szomszédja. A mostani eredményüktől a következő változtatással:

Leibniz	végtelen sok	délnyugat	északkelet
helyett rendre			
Pascal	véges számú	északkelet	délkelet,

a 3.34. példához juthatunk. A 3.51. példában ennek az „ellentét által való analógiának” további megnyilvánulásait figyelhetjük meg.

3.55. Tekintettel a harmonikus háromszög explicit képletére (3.52. példa) az $(r-1)$ -edik sor elemei a 3.53. példa megfelelő elemeitől csak egy tényezőben különböznek, $r = 2, 3, \dots$ -ra és a keresett összeg

$$\frac{1}{(r-1)!(r-1)}.$$

3.57. A szorzat $= 1$. A végtelen sorok elméletében jártas olvasó megérti a következő azonosság kevésbé formális jelentését is:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = (1-x)^{-1},$$

ismeri azt a feltételt, amely mellett ez az azonosság teljesül, és kielégítő levezetést is tud adni.

3.58. $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$; a 3.57. példa ennek speciális esete.

3.59. Mindégység sor megfelel a Pascal-háromszög egy-egy délnyugat felé tartó utójának. Az első sorra lásd a 3.57. példát. A 3.58. és a 3.34. példa ismételt alkalmazásával azt találjuk, hogy

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = (1 + x + x^2 + \dots)^2$$

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots = (1 + x + x^2 + \dots)^3,$$

és általában

$$\begin{aligned} \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r}x + \binom{r+2}{r}x^2 + \dots + \binom{r+n}{r}x^n + \dots = \\ = (1 + x + x^2 + \dots)^{r+1} = (1-x)^{-r-1}. \end{aligned}$$

A formális bizonyításhoz alkalmazzunk teljes indukciót.

3.60. Számítsuk ki a következő szorzatban x^n együtthatóját kétféle módon:

$$(1-x)^{-r-1}(1-x)^{-s-1}.$$

Ez szoros analogonja a 3.36. példa megoldásában közölt algebrai kiindulásnak, amely a 3.9.(3) pontra nyúlik vissza.

3.61. Rendre 1, 0, 0, 0, amely az N-sejtésnek megerősítése.

3.62. Rendre $\frac{2}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{4}{81}, -\frac{7}{243}$; két, lényegesen különböző eljárással számoltunk. Az N-sejtésnek másik megerősítése.

3.63. $(1+x)^{1/3}(1+x)^{2/3}$

$$\begin{aligned} &= \left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} + \dots\right) \left(1 + \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{4x^3}{81} - \frac{7x^4}{243} + \dots\right) \\ &= 1 + x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \dots \end{aligned}$$

Az N-sejtésnek további megerősítését adja.

3.64. A 3.57. példa alapján:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{-1}{1}x + \frac{(-1)(-2)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \\ = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \\ = [1 - (-x)]^{-1} = (1 + x)^{-1}. \end{aligned}$$

Ez teljesen más oldalról erősíti meg az N-sejtést. Származtathatnánk-e az N-sejtésből a 3.59. példában szereplő többi sort is?

$$\begin{aligned} 3.65. \quad \binom{j-1-x}{j} &= \frac{j-1-x}{1} \cdot \frac{j-2-x}{2} \dots \frac{-x}{j} = \\ &= (-1)^j \frac{x}{1} \dots \frac{x-j+2}{j-1} \cdot \frac{x-j+1}{j}. \end{aligned}$$

3.66. Az N-sejtéssel egyezően $(1+x)^{-j-1}$ kifejtésében x^n együtthatója

$$\binom{-j-1}{n} = (-1)^n \binom{n+j}{n} = (-1)^n \binom{j+n}{j};$$

először a 3.65.(II) példát alkalmaztuk, azután feltételeztük, hogy j *nemnegatív egész szám*, és a 3.31. példát is felhasználtuk. x helyébe $-x$ -et, és így x^n helyébe $(-1)^n x^n$ -t téve, a 3.59. példa általános eredményét kapjuk, amely az N-sejtést egy átfogó speciális esetben bizonyítja: a negatív egész értékeire.

$$\begin{aligned} 3.67. \quad \left[\binom{a}{0} + \binom{a}{1}x + \dots + \binom{a}{r}x^r + \dots \right] \left[\binom{b}{0} + \dots + \binom{b}{r-1}x^{r-1} + \right. \\ \left. + \binom{b}{r}x^r + \dots \right] = \binom{a+b}{0} + \binom{a+b}{1}x + \dots + \binom{a+b}{r}x^r + \dots \text{-ből} \end{aligned}$$

következik (3.56 példa), hogy

$$(*) \quad \binom{a}{0}\binom{b}{r} + \binom{a}{1}\binom{b}{r-1} + \dots + \binom{a}{r}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{r}.$$

Ha $a = m$ és $b = n$, akkor ez az összefüggés a 3.36. példa eredményébe megy át, de az értelmezési tartomány különböző: m és n csak nemnegatív egész számok lehetnek, a és b viszont tetszőleges számok.

3.68. Az N-sejtésből levezetett (*) kapcsolat nincs bebizonyítva, az még maga is csak sejtés.

Viszont a (*)-gal jelölt kapcsolatnak azt a speciális esetét, melyben a és b pozitív egész számok, a 3.36. példában bebizonyítottuk. A 3.66. példa megoldásából (*) kapcsolatnak az a speciális esete, amelyben a és b negatív egész számok, a 3.57. példa eredményével egyenértékű, és így az is be van bizonyítva. (Figyeljük meg, hogy (*) a 3.36. és 3.37. példák közti kívánt kapcsolatot biztosítja; lásd a 3.37. példa megoldásának a végén tett megjegyzést.)

Használhatjuk-e a 3.36. példát eszköznék a teljes bizonyításhoz? Ez a példa a bizonyítandó (*) kapcsolat viszonylag tág speciális esete. [Igen, amennyiben megvan

a szükséges algebrai előismeretünk: ha egy polinom két változónak (x -nek és y -nak) minden pozitív egész értékére eltűnik, akkor x és y -ban azonosan tűnik el.]

Legyen

$$\binom{a}{0} + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \dots + \binom{a}{n}x^n + \dots = f_a(x).$$

A (*) kapcsolat lényegében egyenértékű az alábbival:

$$f_a(x)f_b(x) = f_{a+b}(x).$$

Vegyük (*)-ot igaznak, akkor következik, hogy

$$f_a(x)f_a(x)f_a(x) = f_{2a}(x)f_a(x) = f_{3a}(x),$$

és általában -

$$f_a(x)^n = f_{na}(x)$$

minden pozitív egész n -re. Legyen n egy (pozitív vagy negatív) egész; mivel az N -sejtést már igazoltuk a pozitív és negatív egész értékeire (lásd a 3.1. és 3.66. példát), következik, hogy

$$[f_{m/n}(x)]^n = f_m(x) = (1+x)^m$$

$$f_{m/n}(x) = (1+x)^{m/n},$$

és így (*)-ból az N -sejtést az a kitevő minden racionális értékére levezettük.

(Az utolsó lépés tulajdonképpen kockázatos, mikor n -edik gyököt vontunk, nem jelöltük meg, hogy az a lehetséges értékek közül melyiket jelenti; így hézagot hagytunk, amelyet bajosan tölthetünk ki, ha a 3.56. példa tisztán formális szempontjánál maradunk. Viszont fontos anyagot gyűjtöttünk a teljes bizonyításhoz. Másfél századdal Newton levele után, 1826-ban, megjelent a nagy norvég matematikusnak, Abel Niels Henriknnek egy tanulmánya, amelyben a binomiális sor konvergenciáját x és a komplex értékeire is vizsgálta; ezzel a végtelen sorok általános elmélete nagyot haladt; lásd Abel *Oeuvres complètes*, 1881, 1 kötet, 219–250. old.)

3.69. A Pascal-háromszög szimmetriatengelyén találjuk meg 1, 2, 6, 20-at. Magyarázat: x^n együtthatója

$$\begin{aligned} (-4)^n \binom{-1/2}{n} &= 4^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{n!n!} \\ &= \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

3.70.

$$a_0 u_0 = b_0$$

$$a_0^2 u_1 = a_0 b_1 - a_1 b_0$$

$$a_0^3 u_2 = a_0^2 b_2 - a_0 a_1 b_1 + (a_1^2 - a_0 a_2) b_0$$

$$a_0^4 u_3 = a_0^3 b_3 - a_0^2 a_1 b_2 + (a_0 a_1^2 - a_0^2 a_2) b_1 - (a_1^3 - 2a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3) b_0.$$

3.71. A 3.70. példában tárgyalt $n = 0, 1, 2, 3$ esetek azt sejtetik, hogy $a_0^{n+1}u_n$ -ek az a -k és b -k olyan polinomjai, amelyben minden tag

- (1) a -kban ugyanazon fokú (n -ed fokú)
- (2) b -kben első fokú
- (3) a -kban és b -kben együttesen a súly ugyanaz (n súlyú)

Megoldás:

(1) Ha a_n -et a_nc -vel helyettesítjük (c tetszőleges, $n = 0, 1, 2, \dots$), u_n -et u_nc^{-1} -gyel kell helyettesítenünk.

(2) Ha b_n helyébe b_nc -t teszünk, akkor u_n helyébe u_nc -t kell tennünk.

(3) Ha a_n -t és b_n -t rendre a_nc^n és b_nc^n -nel helyettesítjük (x helyébe cx helyettesítés eredményeként), akkor u_n -et is u_nc^n -nel kell helyettesítenünk.

3.72. Az eredmény szükségképpen $u_n = b_n - b_{n-1}$; fejezzük ki ugyanis u_n -et a -kal és b -kel, legyen továbbá $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 1$. Értékes ellenőrzés; hajtsuk végre $n = 0, 1, 2, 3$ -ra (3.70. példa).

3.73. Az eredmény szükségképpen $u_n = b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n$ (lásd a 3.58. példát). Fejezzük ki u_n -t a -kal és b -kel, legyen továbbá $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = a_3 = \dots = 0$. Értékes ellenőrzés; hajtsuk végre $n = 0, 1, 2, 3$ -ra (3.70. példa).

3.74.

$$1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{40} - \frac{x^3}{336} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)(2n+1)} + \dots$$

L. MPR, 1. kötet, 84. old. 2. példa.

3.75.

$$a_1 u_1 = 1$$

$$-a_1^3 u_2 = a_2$$

$$a_1^5 u_3 = 2a_2^2 - a_1 a_3$$

$$-a_1^7 u_4 = 5a_2^3 - 5a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_4$$

$$a_1^9 u_5 = 14a_2^4 - 21a_1 a_2^2 a_3 + 3a_1^2 a_3^2 + 6a_1^2 a_2 a_4 - a_1^3 a_5.$$

3.76. A 3.75. példában tárgyalt esetek azt sejtetik, hogy $a_1^{2n-1}u_n$ az a -knak olyan polinomja, melyben minden tag

- (1) $(n-1)$ -ed fokú és
- (2) $(2n-2)$ súlyú.

Megoldás:

(1) ha a_n -t a_nc -vel helyettesítjük (ugyanaz az eredmény, mint x -nek $c^{-1}x$ -szel való helyettesítésénél), u_n -t u_nc^{-n} -nel kell helyettesítenünk.

(2) ha a_n -t a_nc^n -nel helyettesítjük (ugyanaz az eredmény, mint y -nak cy -nal való helyettesítésénél), u_n -t u_nc^{-1} -gyel kell helyettesítenünk.

$$3.77. \quad x = \frac{y}{1-y}, \quad y = \frac{x}{1+x}, \quad \text{és így}$$

$$y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots$$

Ezért, ha $a_n = 1$ -t teszünk a 3.75. példában, akkor szükségképpen $u_n = (-1)^{n-1}$. Értékes ellenőrzés; hajtsuk végre $n = 1, 2, 3, 4, 5$ -re.

3.78. $1 - 4x = (1 + y)^{-2}$ vagy

$$y = -1 + (1 - 4x)^{-1/2} = 2x + 6x^2 + \dots + \binom{2n}{n} x^n + \dots$$

lásd a 3.69. példát.

3.79. $y = -1 + (1 + 4ax)^{1/2}(2a)^{-1}$

$$= x - ax^2 + 2a^2x^3 - 5a^3x^4 + 14a^4x^5 - \dots$$

x^n együtthatója

$$\frac{(4a)^n}{2a} \binom{1}{n} = \frac{(-1)^{n-1} a^{n-1}}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

(kiszámítása a 3.69. példához hasonlóan) és a 3.75. példában szereplő u_n -nek ezt az értéket kell felvennie, ha $a_1 = 1$, $a_2 = a$, $a_3 = a_4 = \dots = 0$. Lásd MPR, I. kötet, 102. old. 7., 8., 9. példa.

3.80.

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots$$

3.81.

$$u_0 = u_1 = u_2 = 1, \quad u_3 = \frac{4}{3}, \quad u_4 = \frac{7}{6}.$$

3.82. Teljes indukció: Az állítás $n = 3$ -ra igaz. Tételezzük fel, hogy $n > 3$, és hogy az állítást az u_n -t megelőző együtthatókra bebizonyítottuk:

$$u_{n-1} > 1, \quad u_{n-2} > 1, \quad \dots, \quad u_3 > 1.$$

Tudjuk, hogy $u_0 = u_1 = u_2 = 1$, és ezért

$$nu_n = u_0 u_{n+1} + u_1 u_{n-2} + \dots + u_{n-1} u_0 > n.$$

3.83. Legyen

$$y = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots + u_n x^n + \dots$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \cdot 1 u_2 + \dots + n(n-1) u_n x^{n-2} + \dots$$

A differenciálegyenletből

$$n(n-1)u_n = -u_{n-2}.$$

A kezdő feltételből

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0.$$

Végül $m = 1, 2, 3, \dots$ -ra

$$u_{2m} = \frac{(-1)^m}{2m!}, \quad u_{2m-1} = 0$$

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

3.84.

$$\begin{aligned}B_n &= B_{n-5} + A_n \\C_n &= C_{n-10} + B_n \\D_n &= D_{n-25} + C_n \\E_n &= E_{n-50} + D_n.\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet azt adja $n = 100$ -ra, hogy

$$E_{100} = E_{50} + D_{100}.$$

és az utolsó előtti $n = 20$ -ra, hogy:

$$D_{20} = C_{20},$$

mivel $D_{-5} = 0$: minden negatív indexű mennyiséget 0-nak kell tekintenünk. Ezek a példák jól rávilágítanak a kapott egyenletrendszer jellemző vonására: akármelyik ismeretlent kiszámíthatjuk (például E_{100} esetében is), ha előbb az ugyanolyan betűvel jelölt, megfelelő alacsonyabb indexűt (mint E_{50}) és egy az ábécé előtte levő betűjével jelölt ugyanolyan indexűt (mint D_{100}) már kiszámítottunk. (Vannak olyan esetek is, amelyekben csak egy előzően kiszámított ismeretlen — ilyen pl. D_{20} — és vannak olyanok is, amelyekben bizonyos „határfeltételek” ismerete szükséges — például B_0, C_0, D_0, E_0 és A_n , ahol $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.) Röviden: az ismeretlenek kiszámítását alacsonyabb indexű és az ábécé előző betűjével jelölt mennyiségekre, végül pedig határfeltételekre vezetjük vissza. [Vigyázzunk, hogy a különböző jelölés ne rejtse el az analógiát e számítás és a binomiális együtthatók rekurzióval és határfeltétellel való kiszámítása között; lásd a 3.6.(2) alpontot.]

Állítson össze az olvasó olyan célszerű számítási tervet, amelyet a

$$B_{10} = 3, \quad C_{25} = 12, \quad D_{50} = 49, \quad E_{100} = 292$$

értékekkel ellenőrizhet.

(További részleteket és a feladat konkrét értelmezését lásd GI. 20. példa és *American Mathematical Monthly*, 63, 1956, 689—697. old.)

3.85. Teljes indukcióval: tételezzük fel, hogy $y^{(n)}$ -re igaz az állítás, még egyszer differenciálva:

$$y^{(n+1)} = (-1)^{n+1}(n+1)!x^{-n-2} \ln x + (-1)^n x^{-n-2} [n! + (n+1)c_n].$$

Ez éppen a kívánt alak, ha

$$c_{n+1} = n! + (n+1)c_n$$

Rendezve:

$$\frac{c_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c_n}{n!} + \frac{1}{n+1},$$

és $c_1 = 1$ felhasználásával

$$c_n = n! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

3.86. Mértani sor összegének meghatározásával szorosan összefüggő probléma; a következőkben felhasználjuk az összegképletet is, és a levezetés szokásos módszerét is. Nevezzük S -nek a felírt összeget. Akkor

$$(1-x)S = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} - nx^n = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n$$

Tehát a keresett rövid kifejezés:

$$S = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

3.87. Használjuk fel a 3.86. példa módszerét, jelölését és eredményét: nevezzük T -nek a felírt összeget, akkor

$$\begin{aligned}(1-x)T &= 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots + (2n-1)x^{n-1} - n^2x^n \\ &= 2S - (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) - n^2x^n.\end{aligned}$$

Ebből egyenletrendezéssel

$$T = \frac{1 + x - (n+1)^2x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

3.88. A 3.86. és 3.87. példa nyomán az

$$1^k + 2^k + 3^k x^2 + \dots + n^k x^{n-1}$$

összegre zárt kifejezést kaphatunk rekurzióval, visszavezetve a k esetét a $k-1$, $k-2$, ..., 2, 1, 0 esetekre.

3.89. Teljes indukcióval. Az állítás nyilvánvalóan igaz $n=1$ -re és

$$\frac{a_n(n+\alpha) - a_1(1+\beta)}{\alpha-\beta} + a_{n+1} = \frac{a_{n+1}(n+1+\beta) - a_1(1+\beta)}{\alpha-\beta} + a_{n+1}.$$

3.90. Alkalmazzuk a 3.89. példát, ha

$$a_1 = \frac{q}{p}, \quad \alpha = p, \quad \beta = q-1.$$

Kiderül, hogy a felírt összeg egyenlő

$$\frac{p}{p-q+1} \left(\frac{p+1}{q} \frac{p+2}{q+1} \dots \frac{p+n}{q+n-1} - 1 \right) \text{-gyel.}$$

$$3.91. \quad (1) \quad 8, \quad 4\sqrt{2}, \quad 4\sqrt{3}, \quad 6.$$

$$(2) \quad K_n = 2n \operatorname{tg}(\pi/n), \quad B_n = 2n \sin(\pi/n).$$

Ezt ismert trigonometriai azonosságokkal már közvetlenül igazolhatjuk.

3.92. Teljes indukcióra további példákhoz lásd az 5. lábjegyzetet. A II. és III. Résszel kapcsolatban valószínűségszámításról vagy kombinatorikáról szóló könyvekben található feladatokat. A IV. Résszel, vagy a 3.53.-tól 3.55.-ig terjedő példák-
kal összefüggő feladatok végtelen sorokról, vagy komplex változós függvényekről
szóló könyvekben találhatók. A 3.81., 3.82. és 3.83. példákkal szoros összefüggésben
álló feladatok a differenciálegyenletek elméletének terjedelmes fejezetét teszik.

Kimeríthetetlenek azok a témák, amelyek további feladatokra vezetnek. Egy példa:
a *polinom-együtthatók* (lásd 3.28., 3.29., 3.30. példákat).

$$(a+b+c)^n$$

kifejtésének együtthatói $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ -ra egy tényolcad rácspontjainak feleltethetők meg, hasonlóan ahhoz, ahogy

$$(a + b)^n$$

kifejtésének együtthatói — a Pascal-háromszögben — egy síknegyed rácspontjainak. Mi az analogonja a térbeli elrendezésben a Pascal-háromszög határfeltételének, rekurziós képletének, egyik és másik irányú utcáinak és sorainak, továbbá a 3.31.—3.39. példának? Mi a kapcsolat a 3.44.—3.50. példákkal? Még nem említettük a binomiális vagy polinomiális együtthatók sajátságainak számelméleti fontosságát. És így tovább.
Nincs megoldás: 3.56.

4. Fejezet

4.1. Jelöljük A -val a gúlának az alappal szemben fekvő csúcsát („tetőpontját”). Vágjuk szét a gúla alapját n háromszögre, területük:

$$T_1, T_2, \dots, T_n.$$

Mindegyik háromszög olyan tetraéder alapja, melynek A az alappal szemben fekvő csúcsa és h a magassága; a gúlát (A -n keresztül menő síkokkal) n tetraéderre vágjuk szét, térfogatuk:

$$V_1, V_2, \dots, V_n.$$

Nyilvánvalóan

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n = T,$$

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = V.$$

Tételezzük fel, hogy a térfogatképletet bebizonyítottuk már a tetraéder speciális esetére, akkor

$$V_1 = \frac{T_1 h}{3}, V_2 = \frac{T_2 h}{3}, \dots, V_n = \frac{T_n h}{3}.$$

A speciális összefüggések összeadása (szuperpozíció!) adja az általánost:

$$V = \frac{Th}{3}.$$

4.2. A k -ad fokú polinom általános alakja:

$$f(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k,$$

ahol $a_0 \neq 0$. Helyettesítsünk x helyébe rendre $1, 2, 3, \dots, n$ -et, és adjuk össze: a 3.11. példa jelölését használva, azt kapjuk, hogy

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = a_0 S_k(n) + a_1 S_{k-1}(n) + \dots + a_k S_0(n).$$

A 3.3. példa eredménye szerint a jobb oldal n -nek $(k+1)$ -ed fokú polinomja.

4.3. A 3.34. példa eredményét a következő alakban írhatjuk fel [lásd a 3.65.(III) példát]:

$$\binom{0}{j} + \binom{1}{j} + \binom{2}{j} + \dots + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j+1}.$$

Tételezzük fel a 4.4. példa állításának a helyességét, akkor a tárgyalt polinomot a következő alakban írhatjuk:

$$f(x) = b_0 \binom{x}{k} + b_1 \binom{x}{k-1} + \dots + b_k \binom{x}{0},$$

ahol $b_0 = k!a_0 \neq 0$ (lásd a 4.4. példa megoldását). Helyettesítsük x -et rendre $0, 1, 2, 3, \dots, n$ -nel és adjuk össze: a 3.34. példa fent említett eredménye szerint azt kapjuk, hogy

$$f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n) = b_0 \binom{n+1}{k+1} + b_1 \binom{n+1}{k} + \dots + b_k \binom{n+1}{1}.$$

A jobb oldal n -nek $k+1$ -ed fokú polinomja.

4.4. Hasonlítsuk össze a felírt azonosság mindkét oldalán x^k -nak (x itt előforduló legmagasabb hatványának) az együtthatóját, azt találjuk, hogy

$$a_0 = b_0/k!.$$

Ezért a felírt azonosságból az következik, hogy

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k - k!a_0 \binom{x}{k} = b_1 \binom{x}{k-1} + \dots + b_k \binom{x}{0}.$$

Hasonlítsuk össze x^{k-1} együtthatóját mindkét oldalon, b_1 -et fejezzük ki a_0 és a_1 -gyel. Így folytatva, rekurzióval határozzuk meg rendre $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$ -t.

4.5. Négy számot, b_0, b_1, b_2 és b_3 -t kell meghatároznunk úgy, hogy a következő kifejezés x -ben azonosan teljesüljön:

$$x^3 = b_0 \binom{x}{3} + b_1 \binom{x}{2} + b_2 \binom{x}{1} + b_3 \binom{x}{0}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$x^3 = \frac{b_0}{6} (x^3 - 3x^2 + 2x) + \frac{b_1}{2} (x^2 - x) + b_2 x + b_3$$

x^3, x^2, x^1 és x^0 együtthatóit összehasonlítva, rendre a következő egyenletekre jutunk:

$$1 = \frac{b_0}{6},$$

$$0 = -\frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{2},$$

$$0 = \frac{b_0}{3} - \frac{b_1}{2} + b_2,$$

$$0 = b_3.$$

innen

$$b_0 = 6, \quad b_1 = 6, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0.$$

A 4.3. példa eljárása szerint ($k = 3$) egyszerű egyenletrendezéssel adódik

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= 6 \binom{n+1}{4} + 6 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}, \\ &= \frac{(n+1)^2 n^2}{4}. \end{aligned}$$

4.6. Ahogy a 4.3. példában bebizonyítottuk, van öt olyan konstans c_0, c_1, c_2, c_3 és c_4 , hogy

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = c_0 n^4 + c_1 n^3 + c_2 n^2 + c_3 n + c_4$$

n minden pozitív egész értékeire. Helyettesítsük rendre az $n = 1, 2, 3, 4$ és 5 értékeket; az öt ismeretlenre (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4) öt egyenletből álló egyenletrendszert nyerünk. Az egyenleteket megoldva azt kapjuk, hogy

$$c_0 = 1/4, \quad c_1 = 1/2, \quad c_2 = 1/4, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0,$$

tehát ugyanarra az eredményre jutunk, mint a 4.5. példában, de több nehézség árán.

4.7. A 4.3. példa a 3.3. példa új bizonyítását adja, egy részlet kivételével: a 4.3. példa eljárásával $S_k(n)$ kifejezésében n^{k+1} együtthatója határozatlan marad. (Egy kis megjegyzést hozzáfűzve, máris megkapjuk ezt az együtthatót is.)

4.8. Igen; egyenest írunk fel az

$$y = ax + b$$

alakú egyenlettel. A jobb oldalon álló polinom fokszáma legfeljebb 1.

4.9. Szemléletesen az x tengellyel egybeeső egyenes látszik a legegyszerűbb interpoláló görbének; ez megfelel az azonosan eltűnő polinomnak. Minden más interpoláló polinom szükségszerűen magasabb fokú, nevezetesen legalább n -ed fokú, minthogy n különböző zéróhelye van, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

4.10. A 4.3. pont utolsó képletével megadott Lagrange-féle interpoláló polinom fokszáma legfeljebb $n - 1$; azt állítjuk, hogy csak ez az interpoláló polinom ilyen alacsony fokú. Ha mind a két polinom fokszáma legfeljebb $n - 1$ és n adott abszcisszájánál ugyanazt az értéket veszik fel, akkor különbségüknek n különböző zéróhelye van, ez több zéróhely annál, mint amennyit a fokszám megenged, kivéve, ha a különbség azonosan eltűnik. A Lagrange-féle interpoláció segítségével megkapjuk az egyetlen olyan polinomot, amelyiknek a fokszáma legfeljebb $n - 1$, és kielégíti a követelményeket. (Minden más polinomnak, amelyik átmegy a megadott pontokon, fokszáma legalább n .)

4.12. a) Nyilvánvaló, tekintettel a differenciálási szabályra:

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2)' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

(ha c_1 és c_2 konstansok).

b) $y = e^{rx}$ akkor és csak akkor megoldása ennek a differenciálegyenletnek, ha r gyöke a következő algebrai egyenletnek:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

c) Ha a b) alatti egyenletnek r -ben d különböző gyöke van, (r_1, r_2, \dots, r_d) és c_1, c_2, \dots, c_d tetszőleges konstansok, akkor

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_d e^{r_d x}$$

is megoldása a differenciálegyenletnek. Ha $d = n$, akkor (mint belátható) ez az egyenlet általános megoldása.

4.13. Az r -re vonatkozó egyenlet most

$$r^2 + 1 = 0,$$

és így a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}.$$

A kezdő feltételek a következő egyenleteket adják:

$$c_1 + c_2 = 1, \quad ic_1 - ic_2 = 0,$$

ezek meghatározzák c_1 -et és c_2 -t. Így a kívánt partikuláris megoldás

$$y = (e^{ix} + e^{-ix})/2.$$

Figyeljük meg, hogy $y = \cos x$ a differenciálegyenletet is és a kezdő feltételeket is kielégíti. (Lásd még a 3.83. példát.)

4.14. a) Nyilvánvaló.

b) $y_k = r^k$ akkor és csak akkor megoldása a differenciaegyenletnek, ha r a 4.12. b) példában adott algebrai egyenletnek gyöke.

c) Ha a 4.12. b) példa egyenletének d különböző gyöke van, (r_1, r_2, \dots, r_d) és c_1, c_2, \dots, c_d tetszőleges konstansok, akkor

$$y_k = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k + \dots + c_d r_d^k$$

a differenciaegyenlet megoldása, és ha $d = n$, akkor (amint megmutatható) ez a legáltalánosabb megoldás.

4.15. Az r -re vonatkozó egyenlet

$$r^2 - r - 1 = 0$$

és így a differenciaegyenlet általános megoldása

$$y_k = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k.$$

Ez $k = 0$ és $k = 1$ -re (kezdő feltételek) a következő egyenleteket adja:

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1,$$

melyekből c_1 -et és c_2 -t meghatározhatjuk, és így a Fibonacci-számok kívánt kifejezése

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

4.16. Ha a valóságos mozgást a három virtuális mozgás *szuperpozíciójával* kapjuk, akkor a mozgó pont koordinátái a t időpontban

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = tv \cos \alpha,$$

$$y = y_1 + y_2 + y_3 = tv \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

t eliminációja a hajítás pályáját adja:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos \alpha},$$

ez pedig *parabola* egyenlete.

4.18. Két ismeretlen van: a tetraéder alapterülete és magassága. Lásd a 4.5/a ábrát.

4.19. Legyen

V a tetraéder térfogata,

T az alapterülete,

H a magassága,

h az alapnak az adott a hosszúságú élhez tartozó magassága.

Akkor

$$V = \frac{TH}{3}, \quad T = \frac{ah}{2}$$

és így

$$V = \frac{ahH}{6},$$

de nincs megadva sem h , sem H .

4.20. A 4.17. példa tetraéderének merőleges vetülete négyzet azon a síkon, amely merőleges a b hosszúságú szakaszra és átmegy az egyik végpontján. Ennek a négyzetnek az átlói a hosszúak, területe $a^2/2$ és maga a négyzet b magasságú derékszögű hasáb alapja (lásd a 4.5/b ábrát). Ezt a hasábot öt, egymást részben sem fedő tetraéderre bontjuk: a 4.17. példában szereplő tetraéder az egyik (térfogata V); a többi négy pedig egymással egybevágó; alapjuk egyenlő szárú derékszögű háromszög, melynek területe $a^2/4$, és magasságuk b . Ezért

$$a^2b/2 = V + 4a^2b/12,$$

$$V = a^2b/6.$$

4.21. Az a sík, amely a tetraéder egyik a hosszúságú élén és a szemközti él közép-pontján megy át, a tetraéder szimmetriasíkja, és azt két egybevágó tetraéderre osztja (lásd a 4.5/c ábrát), ezeknek közös alapja nyilván $ab/2$ területű egyenlő szárú háromszög, magasságuk $a/2$. Így a keresett térfogat

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{ab}{2} = \frac{a^2b}{6}.$$

(Két ilyen szimmetriasík van, melyek tetraéderünket együttesen négy egybevágó tetraéderre osztják: ez a megoldáshoz más, de csak kevésbé különböző kiindulópont.)

4.22. Tetraéderünket prizmoid olyan határesetének (elfajult esetének) tekinthetjük, melynek magassága b és mindkét alap a hosszúságú vonalszakaszra húzódik össze; a középmetszet $a/2$ oldalú négyzet (4.5/d ábra). Ezért

$$h = b, \quad L = 0, \quad M = a^2/4, \quad N = 0,$$

és a prizmoidképlet szerint $V = a^2b/6$.

4.23. Ha a 4.19. példában V -re talált kifejezés megégyezik a 4.20., 4.21. és 4.22. példában három különböző úton levezetett eredménnyel, akkor

$$Hh = ab.$$

Megmutathatjuk ezt az összefüggést ettől függetlenül is. Kiszámítjuk két különböző módon annak az egyenlő szárú háromszögnek a területét, melyben a tetraédert egyik szimmetriasíkja metszi (lásd a 4.21. példát és a 4.5/e ábrát). Így sikerrel befejezzük (ha kissé nyakatekerten is) a negyedik levezetést, amelyet a 4.18. példában kezdtünk és a 4.19. példán át folytattunk.

4.24. A 4.18. példától a 4.19. példán át a 4.23. példáig az út túlságosan hosszú és tekervényes. A megoldás a 4.21. példában a legelegánsabb: az alakzat szimmetriáját teljesen kihasználja — de épp ez okból nem szimmetrikus esetekre talán kevésbé alkalmazható. Így első látásra azt gondolhatnók hogy a 4.20. példának legjobbak az esélyei. Szól-e más szempont is a 4.20. példa mellett?

$$4.25. L = M = N, \text{ és így } V = Lh.$$

$$4.26. N = O, M = L/4 \text{ és így } V = Lh/3.$$

4.27. A P_i -hez kapcsolódó mennyiségeket jelöljük rendre L_i , M_i , N_i és V_i -vel ($i = 1, 2, \dots, n$), a P -re vonatkozóakat L , M , N és V -vel. Az összes prizmoid magassága ugyanaz, h . Nyilván

$$L_1 + L_2 + \dots + L_n = L,$$

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = M,$$

$$N_1 + N_2 + \dots + N_n = N,$$

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = V.$$

Ezeket az egyenleteket kombinálva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{L_i + 4M_i + N_i}{6} h - V_i \right) = \frac{L + 4M + N}{6} h - V.$$

A jobb oldalt egy tagnak, a bal oldalt n hasonló tag összegének tekinthetjük. Ha az egyenletünkben szereplő $n + 1$ tagból n tag eltűnik, akkor a megmaradó egyetlen tagnak is el kell tűnnie.

4.28. Tetraéderünk merőleges vetülete az l -en áthaladó síkra négyszög (a 4.20. példa speciális esetében négyzet, lásd a 4.5/b ábrát; de általában szabálytalan). A négyszög egyik átlója az l él, a másik átlója n -nel párhuzamos és egyenlő. A négyszög olyan hasáb alapja, melynek magassága h ; a hasáb öt tetraéderre bomlik; ezek egyike a mi tetraéderünk; a másik a 4.26. példában leírt helyzetű négy gúla, és így ezekre érvényes a prizmoidképlet. Ez a képlet a 4.25. példa szerint a hasábra is érvényes, tehát a 4.27. példa szerint a mi tetraéderünkre is.

4.29. Az M.4.29. ábra prizmoidot mutat; B, C, \dots, K az alap csúcsai (a papír síkjában), és B', C', \dots, K' a fedőlapé.

(1) Vegyük azt a gúlát, melynek alapja a prizmoid fedőlapja és ezzel szemközi csúcsa az alaplap szabadon választott A pontja.

(2) Kössük össze az A pontot az alaplap B, C, \dots, K csúcsaival. Mindegyik így nyert szakasz összekapcsolható a fedőlap egy oldalával (a prizmoid egy élével); a szakasz és az oldal egy tetraéder szemközi élpárját alkotja. (Például, az AB szakaszt $B'C'$ oldallal kapcsoljuk. Ezek együtt, mint szemközi élek, az $ABB'C'$ tetraédert határozzák meg.)

(3) A -ból B, C, \dots, K csúcsokhoz húzott szakaszok az alaplapot háromszögekre osztják szét. Mindegyik háromszöget kapcsoljuk össze a fedőlap egy-egy csúcsával; a kapott gúla alapját a háromszög, csúcsát az ezzel összekapcsolt csúcs képezi (tulajdonképpen tetraéder; például ABC összekötve C' csúccsal együtt az $ABC - C'$ gúlát határozza meg.)

Prizmoidunkat az (1), (2) és (3)-ban bevezetett testekre vágtuk szét. [A fedőlapnak (1) a területét, (2) az oldalait, (3) a csúcsait tartalmazza. Az alaplapnak (1) csak egy pontját, (2) a felosztó szakaszokat, (3) az egész területét tartalmazza.] Alkalmazzuk a 4.26. példát az (1) és (3) gúlákra, a 4.28. példát pedig a 2. tetraéderekre. A 4.27. példa felhasználásával bizonyítsuk be a prizmoidképletet a 4.29. ábra $BC \dots KB'C' \dots K'$ prizmoidjára.

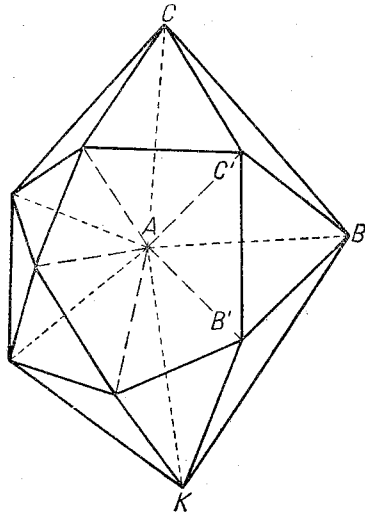
4.30. A 4.28. példa megoldása nem teljes, mivel három lehetséges eset közül csak az egyiket tárgyalja. Vegyük a két egyenesszakaszt, l -et és n -et, és n merőleges vetületét n' -t, az l -en átmenő, n -nel párhuzamos síkon. Vizsgáljuk azt a két egyenest, mely ezt a két szakaszt, l -et és n' -t, valamint metszéspontjukat, I -t tartalmazza. Három helyzet lehetséges: az I pont

- (0) az l és n szakaszok egyikén sincs,
- (1) pontosan az egyik szakaszon van rajta,
- (2) mindkét szakaszon rajta van.

A 4.20. példa csak a (2) esetet tárgyalja. Azonban az (1) helyzetben levő tetraédert két (2) helyzetű különbségének, a (0) helyzetben levőt két (1) helyzetű különbségének tekinthetjük. A 4.27. példa tekintetbe vételével ez a megjegyzés kiegészíti a 4.28. példa bizonyítását.

4.31. Az M.4.29. ábra két tekintetben speciális:

- (1) mindkét alap konvex,
- (2) az egyik alap mindenegyres csúcsának megfelel (ez kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés) a másik alap egy oldala: két oldalél indul a csúcsból és végződik az oldal két végpontjában. (Például B csúcs a $B'C'$ élnek, C' csúcs a BC élnek felel meg.)



M.4.29. ábra.

A (2) feltétel tulajdonképpen kevésbé korlátoz, mint ahogy látszik: sok alakzat, amelyik közvetlenül nem tartozik ide, határeset és ilyen alakzatokra a bizonyítást kiterjeszthetjük (folytonosság vagy megfelelő értelmezés révén).

A 4.35. példában az (1) és (2) specializálástól mentes a bizonyítás, de integrálszámítást használunk.

4.32. $n = 0$; akkor $L = M = N = 1$, $I = 2$: érvényes.

$n = 2m - 1$, páratlan; $-L = N = 1$, $M = I = 0$; érvényes.

$n = 2m$, páros; $L = N = 1$, $M = 0$, $I = 2/(n + 1)$; érvényes $n = 2$ -re, de más páros pozitív egész számra nem.

4.33. $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$; A 4.32. példa $n = 0, 1, 2, 3$ speciális eseteinek szuperpozíciója.

4.34. $x = a + \frac{h(t+1)}{2}$ helyettesítés az $a \leq x \leq a + h$ intervallumot transzformálja a $-1 \leq t \leq 1$ intervallumba, és minden x -ben 3-nál alacsonyabb fokú polinomot t -ben ugyanolyan fokúba.

4.35. Derékszögű koordináta-rendszert vezetünk be (x, y, z) . A prizmoidot úgy helyezzük el, hogy az alapja a $z = 0$ síkban, a fedőlapja a $z = h$ síkban fekszen. A prizmoid térfogatát a

$$(1) \quad V = \int_0^h Q(z) dz$$

összefüggéssel fejezzük ki; $Q(z)$ -vel jelöljük az alappal párhuzamos és tőle z távolságra levő sík és a prizmoid metszetének a területét.

Ha a prizmoidnak n oldallapja van, akkor ez a metszet n oldalú sokszög; területe

$$(2) \quad Q(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

ha az i -edik oldalát a következő két egyenlet határozza meg:

$$(3) \quad x_i = a_i z + c_i; \quad y_i = b_i z + d_i$$

a_i, b_i, c_i, d_i konstansok, melyeket az i -edik él helyzete határoz meg; a számozás úgy értendő, hogy az $(n + 1)$ -edik oldalát az 1-es számúval esik egybe; így

$$a_{n+1} = a_1, \quad b_{n+1} = b_1, \quad \dots, \quad y_{n+1} = y_1.$$

A (2) és (3) egyenlet megmutatja, hogy $Q(z)$ a z -nek 2-nél nem magasabb fokú polinomja, és így a 4.34. példa szerint a 4.32. példában kimondott Simpson-szabály az (1) integrálra alkalmazható. Ebből a 4.22. példa prizmoid képlete is adódik; mivel nyilvánvalóan

$$Q(0) = L, \quad Q\left(\frac{h}{2}\right) = M, \quad Q(h) = N$$

rendre az alaplapp, a középmetszet és a fedőlap területe.

Nincs megoldás: 4.11., 4.17., 4.36.

5. Fejezet

5.1. Az ismeretlen: V .

Az adat: a és h .

A feltétel az, hogy V olyan egyenes hasáb térfogatának mérőszáma, melynek h a magassága, és a oldalú négyzet az alapja.

5.2. Két ismeretlen van: x és y valós számok. Vagy: csak egy ismeretlen van, de az két összetevőjű, összetevői x és y . Mértani értelmezése lehet: x és y derékszögű koordinátájú pont a síkban.

A feltételt teljesen kifejezi a felállított egyenlet.

Nem szükséges adatokról beszélnünk. (Ha megváltoztatva problémánkat, a felállított egyenlet jobb oldalán l helyébe r^2 -et teszünk, akkor r adat lesz.)

Egyik megoldás például $x = 1$, $y = 0$; a másik $x = 3/5$, $y = -4/5$ és így tovább. Mértani értelmezése: a megoldás teljes halmaza az origó középpontú, egységsugarú kör kerületének pontjaiból áll.

5.3. Nincs megoldás: a megoldások halmaza üres halmaz.

5.4. Nyolc megoldás van:

$(2,3)$ $(3,2)$ $(-2,3)$ $(-3,2)$ $(2,-3)$ $(3,-2)$ $(-2,-3)$ $(-3,-2)$

A halmaz az origó középpontú $\sqrt{13}$ sugarú kör kerületének rácspontjaiból áll. (*Rácspontnak* olyan pontot nevezünk, amelynek mindkét koordinátája egész szám. A rácspontokból álló alakzat fontos a számelméletben, kristálytanban stb.)

5.5. A három összetevőjű (x, y, z) ismeretlent a tér olyan pontjaként értelmezzük, amelynek a derékszögű koordinátái x , y és z .

(1) A megoldások halmaza annak az oktaédernek *belső pontjaiból* áll, melynek az origó a középpontja, és a következő hat csúcsa van:

$(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$.

(2) A megoldások halmaza az oktaéder belsejében és *a felületén* fekvő pontokból áll.

5.6. A következő állítás világosan mutatja a kívánt fő részeket:

Ha egy derékszögű háromszög oldalainak hossza a , b és c , és a derékszöggel szemben fekvő oldal hossza a ,
akkor

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

5.7. A tételt úgy kell átfogalmaznunk, mint két állítás egyidejű kijelentését a szokásos „ha-akkor” alakban, így a hipotézis és a konklúzió szembetűnő;

„Ha n teljes négyzet,

akkor $d(n)$ páratlan.”

„Ha $d(n)$ páratlan,

akkor n teljes négyzet.”

Együtt a kettőt tömören így mondhatjuk: „ n akkor és csak akkor teljes négyzet, ha $d(n)$ páratlan”.

5.16. Kezdjük konvex sokszög tárgyalásával, azután vegyük megfelelő módosítással az általános esetet.

(1) Adott $(n - 1)$ szakasz, mely a sokszög egyik kiválasztott csúcsát a többi csúccsal köti össze és $n - 2$ szög, melyeket a szomszédos szakaszok zárnak be.

(2) Osszuk $n - 3$ átlóval a sokszöget $n - 2$ háromszögre. Mindegyik háromszöget három oldala határozza meg, ezek — a felosztó átlók és a sokszög oldalai — adottak.

(3) Vegyük a (2) alatti háromszögekre osztás azon speciális esetét, melyet az (1)-ben említett szakaszokkal végzünk el. Számozzuk a háromszögeket úgy, hogy mindegyiknek (kivéve az elsőt) legyen az előzővel közös oldala. Adjunk meg az első háromszögre három független adatot és a többi $n - 3$ háromszögre $2 - 2$ olyan adatot, amelyek függetlenek egymástól és attól az oldaltól, amelyik az előző háromszöghöz is hozzátartozik.

(4) Az n csúcs mindegyikének két-két derékszögű koordinátája, összesen $2n$ adat, nemcsak a sokszöget, hanem a koordináta-rendszer helyzetét is meghatározná, pedig az lényegtelen. A koordináta-rendszer helyzete 3 paramétertől függ, és így csak $2n - 3$ adat lényeges.

5.17. Az alap meghatározásához $2n - 3$ adat szükséges (lásd az 5.16. példát). A tetőpontot (az alappal szemközti csúcst) adjuk meg három derékszögű koordinátájával olyan derékszögű koordináta-rendszerben, amelynek az alap az egyik koordinátasíkja, az origó az alap egyik kiválasztott csúcsa, és az egyik, ebből a csúcsból kiinduló oldalát az egyik tengelyén van. Ezért $2n$ adat szükséges.

5.18. Úgy, mint az 5.17. példában, $2n$ adat.

5.19. A polinom

$$f_0 x_v^n + f_1 x_v^{n-1} + \dots + f_{n-1} x_v + f_n$$

alakú, ahol f_j a $v - 1$ számú változóban j -ed fokú polinom. Felhasználva a 3.34. példát, teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy a szükséges adatok száma (x_1, x_2, \dots, x_n) hatványai szerint haladó kifejtésében az együtthatók száma):

$$\binom{n+v}{v} = \binom{0+v-1}{v-1} + \binom{1+v-1}{v-1} + \dots + \binom{n+v-1}{v-1}.$$

Níves megoldás: 5.8., 5.9., 5.10., 5.11., 5.12., 5.13., 5.14., 5.15.

6. Fejezet

6.1. (1) $9; r(x) = 0$ alakú,

(2) $9; r(x) = 0$ alakú,

(3) $36; r(x, y) = 0$ alakú,

(4) $7; r(x, y, z, w) = 0$ alakú.

Vegyük számításba, hogy a relációk bizonyos eseteket kizárnak. 61. részfeltétel van.

6.2. Vegyük x -et n komponensűnek (komponensei x_1, x_2, \dots, x_n).

6.3. Legyen $x_1 = y_1; x_4 = y_3$; vegyük y_2 -t két (x_2 és x_3) komponensűnek, tekintsük továbbá az r_2 és r_3 részfeltételek összekapcsolását (az egyidejű kimondását) egyetlen részfeltételnek; akkor megfelelő jelöléssel *rekurzív* rendszert kapunk:

$$s_1(y_1) = 0,$$

$$s_2(y_1, y_2) = 0,$$

$$s_3(y_1, y_2, y_3) = 0.$$

6.4. Legyenek y_1 komponensei x_1, x_2, x_3 és y_2 -é x_4, x_5, x_6 legyen, továbbá $y_3 = x_7$. Kapesoljuk össze s_1 részfeltételbe az első hármat (r_1, r_2, r_3 -at) és s_2 -be a következő hármat (r_4, r_5, r_6 -ot); akkor ugyanazt a rendszert kapjuk, mint a 6.3. példában.

6.5. Lényegében ugyanaz a terv, mint amelyet a 6.4.(2) pontban kifejtettünk.

6.6. A 6.4.(1) pont rendszerének speciális esete. Lásd a 3.21. példát.

6.7. Két mértani hely egy egyenes meghatározására; lásd a 6.2.(5) pontot. Adott körben adott hosszúságú húrok összessége az adott körrel koncentrikus (könnyen megszerkeszthető) kör érintőin fekvő szakaszok.

6.8. Szerkesszük meg a -n az A és b -n a B pontot, a két egyenes (a és b) metszéspontjából $l/2$ távolságra: rajzoljuk meg azt a kört, amely a -t A -ban, b -t B -ben érinti; mivel A -nak két helyzete lehetséges, B -nek szintén, azért négy ilyen kör van. E körök közül az egyik a keresett háromszöghöz hozzáírt kör: x egyenes a négy kör közül az egyiket érinti. Két mértani helyünk van x egyenesre; lásd a 6.2.(5) pontot és a 6.7. példát.

6.9. RÁSZAVAZ.

6.11. (1) Kezdjük a „bűvös négyzet” konstansával. Egyfelől a kilenc ismeretlen (x_{ik}) összege

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45,$$

másfelől a három sor összege

$$3c.$$

Ebből $45 = 3c$ és $c = 15$ következik.

(2) Adjuk össze a három sort és a két átlót: összegük 50. Vonjuk le azokat a sorokat és oszlopokat, amelyek a középső elemet, x_{22} -t *nem* tartalmazzák; számuk 4, összegük $4c$. Azt kapjuk, hogy

$$3x_{22} = 5c - 4c = 15,$$

ezért $x_{22} = 5$.

(3) Most azokat a sorokat és oszlopokat akarjuk kitölteni, amelyek a középső elemet, x_{22} -t, *nem* tartalmazzák. Bontsuk fel ezért a 15-öt minden lehetséges módon három különböző szám összegére úgy, hogy az összeg tagjai a következő nyolc szám közül kerüljenek ki: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Ha tervszerűen végigpróbáljuk az összes lehetőséget, ezeket a felbontásokat kapjuk:

$$15 = 1 + 6 + 8$$

$$= 2 + 6 + 7$$

$$= 2 + 4 + 9$$

$$= 3 + 4 + 8$$

(4) Azokat a számokat, amelyek 15-nek a fenti négy előállításában *csak egyszer fordulnak elő*, vastagabb nyomtatással különböztettük meg, ezeket egy sor vagy egy oszlop közepére kell tennünk. A többi (szokásos nyomású) *kétszer* fordul elő: ezeket a bűvös négyzet egy-egy sarkába kell helyezni.

(5) Induljunk ki a vastagon nyomott számok bármelyikéből (például 1-ből). Legyen ez az x_{12} . 15-nek ugyanabban az előállításában a szokásosan nyomott számok egyike (a mi példánkban 6 vagy 8) szükségképpen x_{11} lesz. Először 4, másodszor 2 alternatíva között választhatunk: több választásunk nincs: 15-nek (3) alatt felsorolt négy előállítását felhasználva, már csak egyféleképpen haladhatunk előre. Így kap-

jük például a következő bűvös négyzetet:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Az a $4 \times 2 = 8$ négyzet, amelyet így képezhetünk, bizonyos értelemben „egybevágó”: ebből az egyből az összes többi forgatással és tükrözéssel megkaphatjuk. Az itt látható négyzet megvalósítja azt a 61 részfeltételt, amely a 6.1. példa megoldásában adódott.

6.12. (1) Ha egy szám első jegye ≥ 2 , akkor 9-cel való szorzás növeli a jegyek számát. Ezért a keresett szám alakja $1abc$.

(2) Mivel $1abc \times 9 = 9\dots$, így a szám alakja $1ab9$.

(3) Ezért

$$(10^3 + 10^2a + 10b + 9)9 = 9 \cdot 10^3 + 10^2b + 10a + 1,$$

$$89a + 8 = b.$$

Innen $a = 0$, $b = 8$: a keresett szám $1089 = 33^2$.

6.13. (1) Mivel $ab \times ba$ háromjegyű számot ad, $ab < 10$. Tételezzük fel, hogy $a < b$; akkor csak tíz lehetséges eset van:

$$a = 1, \quad 2 \leq b \leq 9; \quad a = 2, \quad b = 3 \quad \text{vagy} \quad 4,$$

$$(2) (10a + b)(10b + a) = 100c + 10d + c,$$

$$10(a^2 + b^2 - d) = 101(c - ab).$$

Ebből $a^2 + b^2 - d$ osztható 101-gyel, de

$$-9 < a^2 + b^2 - d \leq 82.$$

Ezért $a^2 + b^2 - d = 0$.

(3) $a^2 + b^2 = d \leq 9$. Ebből $b < 3$, és így $a = 1$, $b = 2$; innen $c = 2$, $d = 5$.

6.14. (*Mathematical Log.* II. kötet, 2. szám.) Próbáljunk ilyen paradox háromszög-párat keresni.

(1) Az ilyen öt rész között nem lehet három oldal: másképpen a háromszögek egybevágóak lennének, és így mind a hat-hat alkotórészük azonos volna.

(2) Észерint a háromszögek két-két oldala és három-három szöge a megegyező. De ha a szögeik megegyeznek, akkor hasonlóak.

(3) Az első háromszög oldalai legyenek a, b, c , a másodiké b, c, d ; ha a mi két hasonló háromszögünknek ezek ebben a sorrendben megfelelő oldalai, akkor:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}.$$

Az oldalak mértani sorozatot alkotnak. Ez lehetséges; itt van rá egy példa:

$$\begin{array}{cccc} a, & b, & c, & d \\ 8, & 12, & 18, & 27 \end{array}$$

Figyeljük meg, hogy $8 + 12 > 18$ és a 8, 12, 18, illetve 12, 18, 27 oldalú háromszögek hasonlóak, mivel az oldalaik arányosak és így a szögeik is egyenlőek.

6.15. (*Mathematical Log.* III. kötet, 2 és 3. szám.)

a) Határozzunk meg három egész számot, x , y , z -t úgy, hogy

$$x + y + z = 9, \quad 1 \leq x < y < z.$$

Rendszeres áttekintés után három megoldást kapunk (9 forintnak háromféle felosztását):

$$\begin{aligned} 9 &= 1 + 2 + 6 \\ &= 1 + 3 + 5 \\ &= 2 + 3 + 4 \end{aligned}$$

b) Rendezzük el ezt a három sort úgy egy négyzetbe, hogy minden oszlop összege is 9 legyen.

Lényegében (azaz a sorok és oszlopok permutációitól eltekintve) csak egy ilyen elrendezés van (melyet csinos, szimmetrikus alakban itt leírunk):

$$\begin{array}{ccc} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}$$

c) Most pedig vonjuk be a játékba a hátralevő szekunder részfeltételt is: Mivel a négyzetben 6 a legnagyobb szám, az első sor Andrásé, az első oszlop a fagylalté. Csak egyetlen szám van a négyzetben, amelyik a saját sora és az első oszlop keresztezésében álló számnak kétszerese, és ez 4; ezért a második sor Béláé és a második oszlop a szendvicseké. És így adott ki Csaba szódavízre 5 forintot (lásd az utolsó sor és oszlop keresztezésében álló számot).

6.16. (*Mathematical Log.* III. kötet, 2. és 3. szám.)

a) Mindegyik feleség x darab ajándékot vásárolt, darabját x centért, mindegyik férj y darabot, egyenként y centért: A feladat azt mondja, hogy

$$x^2 - y^2 = 75$$

$75 = 3 \times 5 \times 5$ és így éppen hat felosztás van:

$$(x - y)(x + y) = 1 \times 75 = 3 \times 25 = 5 \times 15.$$

Ezért csak három változat adódik:

$$\begin{array}{l} x - y = 1 \quad \text{vagy} \quad x - y = 3 \quad \text{vagy} \quad x - y = 5 \\ x + y = 75 \quad \quad \quad x + y = 25 \quad \quad \quad x + y = 15 \end{array}$$

Ebből a következő táblázatot kapjuk:

feleség	férj
38	37
14	11
10	5

MEGOLDÁSOK

b) Vonjuk be a játékba most a hátralevő „szekunder” részfeltételeket is: *egyértelműen* azt mutatják, hogy

Anna 38	37 Barna Balázs
14	11 Jánossy József
Zsóka 10	5

Ebből az következik, hogy Marika férje Jánossy József.

6.17. (Lásd: *Archimedes*, 12. kötet, 1960., 91. old.) Már a kezdet kezdetén világos, hogy az esetek száma véges (41 = 24). De ha elég sütnivalónk van, akkor ezeket sem kell mind végigvizsgálnunk.

a) Legyen azoknak az üvegeknek a száma, amelyet

Bartháné Fejérné Garáné Szabóné
űritett ki, rendre

b f g s
Ekkor

$$b + f + g + s = 14,$$

$$b + 3f + 2g + 4s = 30,$$

és így

$$2f + g + 3s = 16.$$

b) Mint az utolsó egyenlet mutatja, vagy g is és s is páros lehet, vagy mindkettő páratlan. Ezért csak 4 esetet szükséges vizsgálnunk:

$f = 8 - \frac{g + 3s}{2}$	g	s
-1	3	5
1	5	3
1	2	4
3	4	2

Csak a negyedik eset megfelelő, és így

$$s = 2, \quad f = 3, \quad g = 4, \quad b = 5.$$

Ezért Szabó felesége Anna, Fejéré Boriska, Garáé Klára és Bartháé Dóra.

6.18. Rejtvényfejtéskor is gyakran érdemes részekre osztani a feltételt. Az olvasó alkalmas feladatokat találhat matematikai fejtörők gyűjteményeiben; amilyen például H. E. Dudeney, *Amusement in Mathematics* (Dover). Sok jó feladat van az *Otto Dunkel Memorial Problem Book*-ban is, amely az *American Mathematical Monthly* 1957. évi 64. kötetének pótfüzete; a 61. oldalon található E 776 számú feladat említést érdemel mint típusának különlegesen szép példája.

6.20. b) 6.2.(4) pont $l = 5$, c) 6.6. példa, $n = 4$, d) 6.4.(1) pont, $n = 4$, e) 2.5.(3) pont, 6.4.(2) pont.

6.22. Az egyenletrendszer a három ismeretlenben (x, y, z) *szimmetrikus*; más szavakkal, ez a három ismeretlen pontosan ugyanazt a szerepet játssza. Ez azt jelenti,

hogy x , y és z valamilyen permutációja felcserélheti egymásközt a három egyenletet, de az egyenletrendszert változatlanul hagyja. Ezért ha az egyenletrendszer az ismeretleneket egyértelműen meghatározza, akkor $x = y = z$; ezt feltételezve, közvetlenül adódik $6x = 30$, $x = y = z = 5$.

Hátra van még annak a bizonyítása, hogy az ismeretlenek egyértelműen vannak meghatározva; ezt a lineáris egyenletrendszerek elméletéből ismert módon mutathatjuk meg.

6.23.

$$y + z = a$$

$$x + z = b$$

$$x + y = c$$

x , y , z bármely permutációja az egyenletrendszer bal oldalát változatlanul hagyja. Legyen $x + y + z = s$ (ez is változatlan, ha x -et, y -t és z -t permutáljuk is); a három egyenlet összeadásából könnyen adódik, hogy

$$s = (a + b + c)/2,$$

és az egyenletrendszer a következő három egyenletre redukálódik

$$s - x = a, \quad s - y = b, \quad s - z = c;$$

és ezek már csak egy-egy ismeretlent tartalmaznak. Az egész egyenletrendszer (nemcsak a bal oldalak) szimmetrikus a következő párokra vonatkozóan (x, a) , (y, b) , (z, c) .

6.24. (Stanford, 1958.) Legyen

$$x + y + u + v = s$$

és lásd a 6.23. példát.

Nincs megoldás: 6.10., 6.19., 6.21., 6.25.

FÜGGELÉK

Útmutatás tanároknak és tanárok tanárainak

Ha a tanár ezt a könyvet hivatásának gyakorlása közben haszonnal akarja forgatni, ne hanyagolja el azokat az útmutatásokat, melyeket a könyv minden olvasójának szántam. Ezenkívül szenteljen figyelmet alábbi észrevételeimnek is.

1. Amint azt már az előszóban is kifejtettem, ezzel a könyvvel a leendő középiskolai matematikatanároknak (de a jelenleg tevékenykedőknek is) alkalmat akartam adni arra, hogy *ki-ki a megfelelő színvonalon alkotómunkát végezhesen*. Azt hiszem, az ilyen alkalom kívánatos. Ha egy tanárnak nincs személyes tapasztalata az alkotómunka valamilyen formájáról, akkor bajosan várható, hogy ő maga ösztönözze, vezesse, segítse vagy akár felismerje hallgatói alkotótevékenységét.

Az átlagtanártól nem lehet elvárni, hogy kutatómunkát végezzen magasabb fokon. De a nem sablonos matematikai probléma megoldása is alkotó szellemi munka. Az ebben a könyvben felvetett problémák (azok, amelyeket nem jelöltünk meg kereszttel) nem kívánnak olyan tudást, amely a középiskolai színvonalat erősen meghaladná, ellenben igenis megkívánnak valamelyes, sőt néha magas fokú koncentrálásra való készséget és ítélőképességet. Véleményem szerint ilyen típusú problémák megoldása az az alkotómunka, amelynek a középiskolai matematikatanárok képzésében szerepelnie kell. Az ilyen típusú problémák megoldása közben a leendő tanárnak valóban alkalma nyílik arra, hogy *a középiskolai matematikaanyag* ismeretét alaposan elsajátítsa, olyan tudást szerezzen, amelyet használni tud, amelyhez nem pusztá magolással, hanem érdekes problémák megoldásával jutott el. És ami még fontosabb, egyszerűs mind némi gondolkodási készséget szerez, alaposabban megismeri a középiskolai matematikaanyagot, mélyebben bepillant a problémamegoldás lényegébe. Mindez felkészíti a tanulók munkájának hatékonyabb irányítására és elbírálására.

2. Ez a kötet az egész tanfolyamnak csak az első felét tartalmazza. A tanítási módszerekre — amelyeket a második kötet egyik fejezetében részletesebben kifejttek — csak közvetve utal.

Ez az első kötet azonban bő példaanyagot ad, amelyet a középiskolában (különösen magasabb osztályokban) fel lehet használni! Hasznos gyakorlatként azt ajánlom a tanároknak, gondolkozzanak azon, hogyan lehetne azokat a problémákat, amelyekkel ők maguk foglalkoznak, a *tanítási gyakorlatban* is értékesíteni.

Az ilyen gondolkodásra az az időpont a legalkalmasabb, amikor problémájukat már megoldották, és a megoldást már meg is emésztették. Ilyenkor az ember visszagondol és megkérdezi magát: „Hol használhatom fel ezt a problémát? Mennyi előismeret szükséges hozzá? Milyen feladatokat kellene előbb adnom ahhoz, hogy osztályomat erre előkészítsem? Hogyan fogalmazhatnám meg ezt a problémát? Hogyan fogalmazhatnám meg ilyen vagy olyan osztályban (konkrétan!), vagy hogyan fogalmazhatnám meg Nagy Pistának?” Ezek mind hasznos kérdések, és van még sok ilyen — de a legjobb mindig az, amely önként adódik.

3. Bár az első kötet nem öleli fel az egész tanfolyamot, elég anyagot ad ahhoz, hogy „Problémamegoldó szeminárium” tankönyvül szolgáljon. Magam különböző intézetekben vezettem ilyen szemináriumokat tanároknak, számos kollégám pedig, aki ilyet kívánt vezetni, elkérte a feladatanyagomat. Ismerek néhány főiskolát, ahol mostanában tartottak ilyen szemináriumokat vagy hasonló tanfolyamokat. Úgy gondolom, nagyon jó volna, ha minél több főiskola kísérletezne ilyen szemináriumokkal. Ez a meggondolás készített arra, hogy az első kötetet a második előtt közreadjam, vállalva az ilyen hiánynos kiadás nyilvánvaló kockázatát.

4. Némi próbálkozás után szemináriumom számára karakterisztikus módszert dolgoztam ki, ennek leírása itt haszonnal járhat.¹

Néhány jellegzetes, jól használható típusra mutató feladatot kérve kifejtő módszerrel oldottunk meg. A négy első fejezet szövege az ilyen munkát tükrözi (már amilyen híven ez nyomtatásban lehetséges). Ezen példák révén jut el az osztály a megoldástípus felismeréséhez és megfogalmazásához — az említett fejezetek szövege azt is bemutatja, hogy ez hogyan történik.

5. Szemináriumomat arra használtam fel (és ez egyik lényeges vonása), hogy a résztvevőknek a problémák magyarázatára, a megoldások irányítására, szóval a *tanítás gyakorlására* lehetőséget adjak, amire a tantervi anyag keretében rendszerint nincs elég alkalom.

A hallgatók olyan házi feladatokat kaptak (lásd az egyes fejezetek végén található példákat), amelyek alkalmat adnak nekik, hogy felhasználják, tisztázzák és általánosítsák azokat a megoldástípusokat (és a módszertani megjegyzéseket is), amelyekkel az órán megismerkedtek.

¹ A következő és néhány megelőző mondat a „*The Journal of Education, Vancouver and Victoria*”-ban megjelent cikkből való. Lásd az Irodalomjegyzéket.

A házi feladatok beadása után egyik-másik részt (egy-egy eredetibb megoldást vagy kényesebb problémát) a táblánál ismertette az egyik hallgató — aki azt különösen jól vagy különösen rosszul oldotta meg. Később, amikor az osztály már hozzászokott ehhez a módszerhez, az egyik résztvevő foglalja el átmenetileg a tanár helyét és vezeti a vitát. A legjobb gyakorlatra a *csoportmunka* ad alkalmat. Ez három részből áll.

Először is egy-egy óra kezdetén minden résztvevő külön-külön feladatot kap (mindegyik csak egyet), amit lehetőleg meg is old az órán; társaival közben nem érintkezhet, de a tanártól kaphat segítséget.

Az előző és a következő óra között minden résztvevő ellenőrzi, kiegészíti, átnézi, és — ha lehet — egyszerűsíti a maga megoldását; más utat is keres — szóval így vagy úgy, erejéhez mérten, megbirkózik a problémával. Ezenkívül még valamennyire meg is kell terveznie, hogyan fogalmazza majd meg az osztályban problémáját és annak megoldását. Alkalmat kell adnunk arra is, hogy az előbb felsoroltakról a tanártól tanácsot kérhessen.

Végül a következő órán a résztvevők négy tagú vitacsoportokat alkotnak (lehet esetleg kisebb vagy nagyobb létszámú is). A csoportokat a résztvevők közös megegyezéssel alakítják ki, ebbe a tanár nem avatkozik bele. A csoport egyik tagja játssza a „tanár” szerepét, a többiek a „tanulók”. A „tanár” megfogalmazza a feladatot a „tanulóknak”, megkísérli felkelteni kezdeményező képességüket, ugyanabban a stílusban, ahogyan a saját tanárjától az osztálymunka alkalmával látta, próbálja a megoldásra rávezetni őket. A megoldás után a bemutatót röviden és baráti hangon megbírálják. Ezután másik résztvevő veszi át a „tanár” szerepét, másik problémát vet fel és fogalmaz meg; az eljárást mindaddig megismétlik, amíg mindenki rákerül a sor. Majd a hallgatókat részben átcsoportosítják. (Két-két szomszédos csoport kölcsönösen „tanárt” küld egymásnak), így minden résztvevő több ízben bemutathatja a megoldását, alkalma nyílik tehát a bemutató csiszolására. — Néhány különösen érdekes problémát vagy különösen sikerült előadást az egész osztálynak bemutatnak, és együttesen megvitatnak. Jobban érdeklődő csoportok önként felvethetik olyan problémák megvitatását, amelyek minden résztvevő számára újak. Az ilyen kezdeményezést — természetesen — pártolni kell.

Az én osztályaimban az ilyen jellegű csoportos vita rövid idő alatt rendkívül népszerűvé vált, és az a benyomásom, hogy szemináriumaim a maguk egészében sikeresek voltak. A résztvevők közül sokan tapasztalt tanárok voltak és sokan azt érezték, hogy a szemináriumon hasznos ötleteket kaptak saját osztályaik vezetésére.

6. E kötet segítségével lehet annak az egyetemi tanárnak, aki problémamegoldó szemináriumot tart (különösen, ha erre első ízben kerül sor). Általában a fent leírt eljárást követheti (lásd a 4. és 5. pontot). Az osztályviták ré-

szére a négy első fejezet bármelyik részét felhasználhatja. A fejezetek végén levő példák házi feladatra alkalmasak: komoly munkát igényel a megoldási vázlatok kibővítése, részletes megfogalmazása, kidolgozása. A tanár azonban nem választhat találomra. Mielőtt kiválasztaná a példát, jól át kell gondolnia a problémát is, a megoldását is, és figyelembe kell vennie a vele összefüggő kérdéseket. Vizsgán vagy zárthelyin lehetőség szerint ne használja fel az itt közzétett feladatokat. E célra vannak megfelelő példatárak (és 1.50., 2.78., 3.92. is). Csoportmunkához (lásd 5. fejezet) legyenek nehezebbek a problémák, de függjenek szorosan össze a már tárgyalt fejezetekkel. Ehhez már lehet választani ebből a könyvből, sőt későbbi fejezeteiből is odaillő problémákat.

Az 5. és 6. fejezetet szintén meg lehet tárgyalni vagy legalábbis olvasásra kijelölni. Ezeknek a fejezeteknek a szerepét azonban a második kötet jobban megmagyarázza.

Ha a tanár már némi gyakorlatra tett szert, természetes, hogy nem kell szorosan ragaszkodnia a részletekhez, hanem szabadon követheti a könyv szellemét.

IRODALOMJEGYZÉK

I. Klasszikusok

- EUKLIDÉSZ, *Elemek*. Magyarra fordította Baumgartner Alajos, Budapest, 1905. („Euklidesz III. 20.” az Elemek III. könyvének 20. proposíciójára vonatkozik.)
- PAPPUS ALEXANDRINUS, *Collectio*, Hultsch kiadása, 1877.; 2. fejezet, 634—637. old. (A VII. kötet kezdete.)
- DESCARTES *Oeuvres*, Charles Adam és Paul Taunery kiadása Ez a munka különösen érdekes számunkra. (A „Szabályok”-ból vett idézetekre és a rá való hivatkozás módjára lásd a 2.72. példát.)
- LEIBNIZ (1) *Mathematische Schriften*, C. J. Gerhardt kiadása. (2) *Philosophische Schriften*, C. J. Gerhardt kiadása. (3) *Opusculs et fragments inédits*, összegyűjtötte Louis Couturat.
- BERNARD BOLZANO, *Wissenschaftslehre*, második kiadás, 1930; lásd 3. kötet, 293—575. old. (Erfindungskunst.)

II. Modernebb művek

- E. MACH, *Erkenntnis und Irrtum*, 4. kiadás, Leipzig, 1924; lásd 251—274. old.
- J. HADAMARD, *Leçons de Géométrie plane*, Paris, 1898; lásd A jegyzet, *Sur la méthode en géométrie*.
- F. KRAUSS, Denkform mathematischer Beweisführung, *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, 63. kötet, 209—222. old.
- WERNER HARTKOPF, *Die Strukturformen der Probleme*; Disszertáció, Berlin, 1958.

III. A szerző idevonatkozó művei

Könyvek

1. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, 2 kötetben; harmadik bővített kiadás, Berlin, 1965; Szegő Gáborral együtt.
2. *How to Solve It*; második kiadás, 1957. Anchor Book A 93 Doubleday. (Magyarra fordította Lakatos Imre *A Gondolkodás Iskolája* címen, Bibliotheca Kiadó, 1957. G. I.-vel hivatkozunk rá.)
3. *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton, 1954. 2 kötetben. *Induction and Analogy in Mathematics* (1. kötet), *Patterns of Plausible Inference* (2. kötet) (MPR-rel hivatkozunk rá). Egyes fejezeteinek magyar fordítása Varga Tamás: *A Matematika Tanítása szemelvénygyűjteményében* jelent meg, Tankönyvkiadó, 1964.)

Dolgozatok

1. Geometrische Darstellung einer Gedankenkette. *Schweizerische Pädagogische Zeitschrift*, 1919. 11. old.

2. Wie sucht man die Lösung mathematischer Aufgaben? *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, 63., 1932, 159–169. old.
3. Wie sucht man die Lösung mathematischer Aufgaben? *Acta Psychologica*, 4., 1938, 113–170. old.
4. Heuristic reasoning and the theory of probability. *American Mathematical Monthly*, 48; 1941, 450–465. old.
5. On Patterns of Plausible Inference. *Courant Anniversary Volume*, 1948, 277–288. old.
6. Generalization, Specialization, Analogy. *American Mathematical Monthly*, 55; 1948, 241–243. old.
7. Preliminary remarks on a logic of plausible inference. *Dialectica* 3; 1949, 28–35. old.
8. With, or without motivation? *American Mathematical Monthly*, 56; 1949, 684–691. old.
9. Let us teach guessing. *Etudes de Philosophie des Sciences, en hommage à Ferdinand Gonsseth*, 1950, 147–154. old. Editions du Griffon, Neuchatel, Sváje.
10. On Plausible reasoning. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1950, 1; 739–747. old.
11. Die Mathematik als Schule des plausiblen Schliessens. *Gymnasium Helveticum*, 10, 1956, 4–8. old. újra megjelent *Archimedes* 8, 1956, 111–114. old. Mathematics as a subject for learning plausible reasoning, C. M. Larsen fordításában, *The Mathematics Teacher*, 52, 1959, 7–9. old.
12. On picture-writing. *American Mathematical Monthly*, 63., 1956, 689–697. old.
13. L'Heuristique est-elle un sujet d'étude raisonnable? *La Méthode dans les Sciences Modernes* („Travail et Méthode”, numéro hors série) 1958, 279–285. old.
14. On the curriculum for prospective high school teachers. *American Mathematical Monthly*, 65, 1958, 101–104. old.
15. Ten Commandments for Teachers. *Journal of Education of the Faculty and College of Education, Vancouver and Victoria*, 1959, 3. szám, 61–69. old.
16. Heuristic reasoning in the theory of numbers. *American Mathematical Monthly*, 66, 1959, 375–384. old.
17. Teaching of Mathematics in Switzerland. *American Mathematical Monthly*, 67, 1960, 907–914. old. *The Mathematics Teacher*, 53, 1960, 552–558. old.
18. The minimum fraction of the popular vote that can elect the President of the United States. *The Mathematics Teacher*, 54, 1961, 130–133. old.

Oktatófilm

Let us teach guessing (Mathematical Association of America)

IV. Problémák

Néhány megoldásra ajánlott példát a *Stanford University (Stanford-Sylvania) Competitive Examination in Mathematics* [Versenyvizsgák] anyagából vettem. Erre a tényre a megoldás elején mutatok rá, feltüntetve azt az évet is (például Stanford, 1957.), amikor ezt a példát adták fel. Legtöbbször a megoldással együtt megjelent a *The California Mathematics Council Bulletin*ben.

The Olympiad Problem Book (szerzők Shklarsky, Chentzov és Yaglom) az orosz versenyvizsgákon feladott sok szokatlan és nehéz elemi problémát tartalmaz. Az angol fordítást J. Sussman ellenőrizte. (Magyar kiadása: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből I., Tankönyvkiadó, 1966.)

NÉV- ÉS TÁRGYMUTATÓ

- Abel 200
 absztrakció 45, 69
 adatok 19, 131, 132, 139, 140
 -, levezetünk valami hasznosat 23
 -, összes 33, 115
 -, változtatása 27, 46, 114
 (l. ismeretlen. adatok. feltétel)
 állítsunk fel egyenleteket (l. megoldás-
 típus, Descartes-féle)
 általános fogalmazás előnyei 81
 általánosítás 62, 66, 75, 77, 90, 93, 94,
 96, 100, 124, 187
 -, figyeljük meg, és általánosítsuk
 89, 96, 97
 -, számok helyett betűk, 39, 58, 174
 analógia, binomiális és polinom együtt-
 hatók 204
 -, binomiális és trinomiális együttha-
 tók 99, 100
 - Heron tételéhez 59
 - Pascal és Leibniz háromszögei
 között 100, 101
 - Pythagoras tételéhez 49, 59
 - síkmértan és térmértan között 28,
 64, 96
 anticipáció 71
 Archimedes 53, 58, 70, 111
 Bernoulli, J. 88
 Bolzano, B. 224
 Descartes 17, 37, 70, 127, 141, 225
 -, *Szabályok a gondolkodás irányí-
 tására* 37, 41 - 43, 68 - 71
 deus ex machina 75
 eredmény vagy módszer 94, 110, 119, 204
 eset történeti háttére (l. kázus) 10
 Euklidész 19, 131, 135, 139, 225
 Euler 60 - 62, 68
 feltétel 19, 20, 142 - 144
 -, elégséges, nem elégséges az ismer-
 etlen meghatározására 33, 55 - 58
 -, fejezzük ki egyenletekkel (l. Des-
 cartes-féle megoldástípus)
 -, felesleges 57, 58
 -, osszuk fel részekre 20 - 22, 34, 42,
 141 - 144, 161, 162
 -, primer részfeltétel 152
 -, részfeltétel 134
 -, részfeltétel, amelyikkel kezdünk
 150 - 154, 160, 161, 163, 164
 -, vegyük csak valamelyik részét
 (l. ismeretlen. adatok, feltétel) 20,
 32, 47, 159
 Fibonacci 63
 - számok 121
 folytonos átmenet 26, 27, 52
 függetlenség és ellentmondás-mentesség
 70, 71
 Galilei 121
 Gauss 73
 Goldbach 133
 gondolkodásunk tehetetlensége 76
 Hadamard 125, 225
 Hartkoib, W. 225
 Heron tétele (l. analógia)
 hipotézis és konklúzió 133, 137, 139

- interpretáció (értelmezés) 45, 58, 88
 ismeretlen 19
- adatok 23, 25, 27, 42, 131, 132, 137
 - feltétel 21, 42, 131, 132, 137
 - meghatározása 49, 50, 122
 - operátor 138
 - , segédismeretlen 46
 - , szemléljük az ismeretlent 29
 - , több összetevőjű 134
 - , több részből álló 134
- James, W. 129
 jó ötlet 31, 38, 74,
- kázus (l. az eset története)
 kitalálás 49, 60, 92, 108
 Krauss, F. 224
 kulcsábra 179
 különféle kiindulás 96, 97, 122
- Lagrange 117, 207
 Leibniz 60, 96, 100, 101, 104, 123,
 137, 138, 160, 225
 Lewis, C. 55
 Lindemann, F. 138
- megoldás 132, 137 – 139
- , visszatekintve a megoldásra 33
- megoldástípus
- , Descartes-féle 37, 41 – 43,
 141 – 144
 - , három mértani hely 34, 148
 - , hasonló alakzatok 25, 26, 31
 - , határozatlan együtthatók 106 – 110
 - , két mértani hely 20 – 22, 31, 34,
 36, 145 – 150
 - , rekurzió 79, 80, 154 – 158
 - , segédalakzatok 30, 31
 - , szuperpozíció 119, 125
 - , teljes indukció 86 – 88, 95
- megoldásunk nyitja 24, 25, 27, 30
 mértani hely 20 – 22, 145
 módszer (l. megoldástípus, eredmény)
 mozgósítás 70
- Newton 60 – 63, 66, 103 – 105, 199, 200
- Pappus 26, 224
 Pascal 80, 83 – 88, 101, 188
 prizmoidképlet 123 – 125
 probléma 129, 130
- , bizonyító 131, 133
 - , ekvivalens 20, 137
 - , egyszerűsítük 69
 - , fő részei 133
 - , ha nem tudjuk megoldani a felvetettet 26, 81
 - , meghatározó 131, 132, 144
 - , részprobléma megoldása 22, 23,
 25, 28, 54, 60
 - , rokon és egyszerűbb 81, 122
 - , segéd 33
 - , vegyük megoldottnak 22 – 25, 27,
 31, 42, 60
 - , vezessük vissza 20 – 22
- Pythagoras 49, 59
- tétele (l. analógia)
- rejtvények 54, 55, 59, 60, 149 – 152,
 155 – 157, 161
- , keresztrejtvény 143, 144, 159, 160
- Simpson-szabály 124
 specializálás 63, 211, 212
 speciális eset 119, 125
- , legközelebbi 78
 - , reprezentáló 91, 189
- speciális helyzet 114, 115, 117
- , célra vezető 119, 125
- Sussman 225
- Szegő G. 224
 szervezés 70
 szimmetria 165, 170, 218, 219
 szukcesszív approximáció 41
 szükséges előismeret 44, 53, 70, 170
- teljes indukció 194
- , figyeljük a szabályosságokat
 (l. általánosítás) 107, 202, 203
- vágyalom 22 – 24
- Wallis 104